S pravca u ravninu

Branimir Dakić, Zagreb

Često se pitamo koji je uzrok što nam učenici imaju toliko problema s razumijevanjem tako jednostavne funkcije kao što je funkcija *apsolutna vrijednost realnog broja*, $f(x) = |x|$. Definiciju te funkcije zapisujemo u obliku

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

i taj zapis tumačimo:

Apsolutna vrijednost pozitivnog realnog broja isti je taj broj, a apsolutna vrijednost negativnog broja jest broj njemu suprotan, dakle također pozitivan broj. Apsolutna vrijednost nule je nula.

Na stranu to što primjeri kojima je svrha potkrijepiti ovu definiciju, često nisu takvi da doprinose njezinu razumijevanju. A bez potrebne pripreme, razumijevanju neće doprinijeti ni grafičko prikazivanje funkcije u koordinatnom sustavu.

Ova funkcija nad intervalom $\langle -\infty, 0\rangle$ pada, a nad intervalom $\langle 0, +\infty\rangle$ raste.

Kad kažemo da bi valjalo provesti pripravu prije grafičke obrade ove funkcije, onda mislimo kako bi se to moglo napraviti uz obradu linearne funkcije, navodeći i obrađujući primjere *po dijelovima linearnih* funkcija.

Jedan takav dobar primjer bio bi ovaj:

Zadatak. Nacrtaj graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \leq 0 \\ -1, & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Najprije valja protumačiti ovaj zapis jer je to prvi susret učenika s takvom funkcijom.

To je realna funkcija čije se vrijednosti za sve $x \leq 0$ računaju po formuli $f(x) = -2x - 1$. Za $0 < x < 2$ funkcija je konstanta, za svaki broj iz tog intervala vrijednost funkcije je jednaka -1, tj. $f(x) = -1$. I kao treće, vrijednosti funkcije za sve brojeve iz intervala $x \geq 2$ računaju se iz formule $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

No jesmo li sigurni da je ovakvo tumačenje učenicima jasno? Postavimo zato ovakva pitanja:

Koliko je: $f(-10)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{7}{4}\right)$?

Koliko je $f(0.11)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$?

Koliko je $f(24)$, $f(12)$, $f(3)$, $f(18.8)$?

A bilo bi još bolje *skakutati* po recima u zapisu funkcije, tako da se učenika svaki put prisili da smjesti dani broj u pravi interval pa onda izračuna vrijednost funkcije odgovarajućim postupkom.

Izračunaj: $f(12)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(0.11)$, $f(-10)$, itd.

Računanje vrijednosti funkcije za zadane brojeve razbistrit će smisao zapisa funkcije i pridonijeti njezinu razumijevanju.

Vratimo se na sam zadatak:

Što zapravo znače uvjeti

$$x \leq 0,\ \ 0 < x < 2 \text{ i } x \geq 2?$$

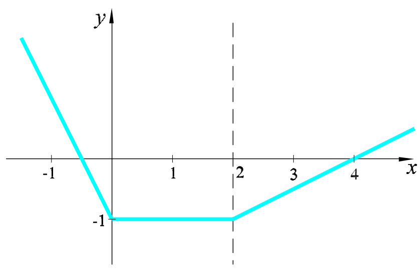
navedeni u zapisu funkcije? Učenici odgovor na ovo pitanje shvaćaju na sljedeći način:

Ovim zapisima dani su intervali na brojevnom pravcu. Njima je brojevni pravac razbijen na tri područja, tri intervala realnih brojeva: $\langle -\infty, 0]$, $\langle 0, 2\rangle$ i $[2, +\infty\rangle$.

Ali što isti uvjeti znače u koordinatnoj ravnini? To pitanje valja nametnuti, jer graf realne funkcije crta se u koordinatnoj ravnini. I tu je taj glavni iskorak koji sada moramo napraviti. Moramo se protegnuti s pravca u ravninu.

Uvjet $x \leq 0$ iz skupa svih točaka $T(x, y)$ ravnine izdvaja one čije su apscise negativni brojevi ili nula, a ordinata y je bilo koji broj. Koje su to točke? Riječ je o zatvorenoj poluravnini slijeva ordinatnoj osi, odnosno o svim točkama iz II. ili iz III. kvadranta.

U toj poluravnini sada probiremo one točke čije su ordinate zadane sa $y = -2x - 1$, odnosno sve točke oblika $(x, -2x - 1)$. To su točke koje pripadaju pravcu s jednadžbom $y = -2x - 1$, točnije dijelu ovoga pravca koji leži u opisanoj poluravnini (polupravcu).



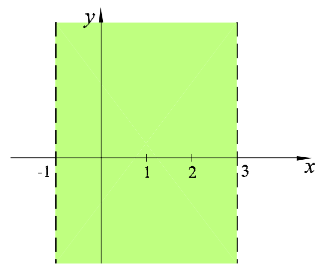
Razmišljajući na jednak način, zaključujemo kako je uvjetom $0 < x < 2$ određena pruga, skup točaka ravnine između dvaju paralelnih pravaca $x = 0$ i $x = 2$. Unutar te pruge izdvajamo podskup točaka oblika $(x, -1)$, dakle dio pravca (dužinu) $y = -1$.

I konačno, s $x \geq 2$ određena je poluravnina u kojoj crtamo polupravac, dio pravca $y = \frac{1}{2}x - 2$.

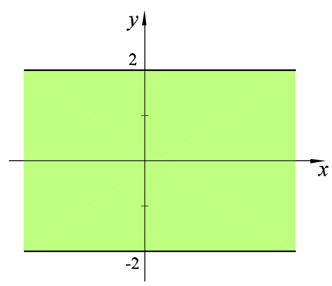
Napomenimo kako je korisno posebno razmotriti vrijednosti funkcije na rubovima intervala.

Već iz ovog jednostavnog primjera razvidno je kako zadacima ove vrste valja pristupati obazrivo jer povezivanje algebarskih zapisa i njihove grafičke predodžbe u koordinatnoj ravnini jest jedan od temeljinih ciljeva učenja matematike u srednjoj školi. Primjeri poput prethodnog jesu jednostavni ali tek nakon što se usvoje s potpunim razumijevanjem.

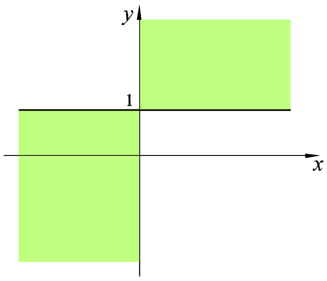
Zato s početnom obradom koordinatnog sustava ne treba žuriti. Valja temeljito i s većim brojem dobro osmišljenih primjera potkrijepiti ideju koordinatne metode. Za rješavanje gornjeg, a i mnogih kasnijih zadataka potrebno je dobro uvježbati određivanja izvjesnih podskupova točaka ravnine zadanih jednostavnijim algebarskim formama. Takve su primjerice sljedeće tri:



$-1 \leq x < 3;$



$$|y| \leq 2;$$



$$x \cdot (y - 1) \geq 0.$$

U prvom je slučaju danim uvjetom određena pruga, skup svih točaka ravnine kojima je apscisa broj x, $-1 \leq x < 3$ a ordinata y bilo koji broj.

U drugom primjeru imamo točke čije ordinate zadovoljavaju uvjet

$-2 \leq y \leq 2$, a x je bilo koji realan broj. Radi se o pruzi čiji su granični pravci paralelni s osi apscisa.

I konačno, uvjet $x(y-1) \geq 0$ ekvivalentan je sustavu nejednakosti $x \geq 0$ i $y \geq 1$ ili $x \leq 0$ i $y \leq 1$. Točke određene na ovaj način iscrtane su na slici.

Evo još jednog jednostavnog primjera s kojim sam imao u nastavi zgodan doživljaj.

Zadatak. Riješi sustav nejednadžbi:

$$\begin{cases} (2x-3)(x+3) \leq 0 \\ (2y+5)(y-2) \leq 0. \end{cases}$$

Riječ je o sustavu dviju nejednadžbi. Valja dakle najprije svaku zasebno riješiti pa odrediti presjek skupova rješenja. Kako su x i y realni brojevi, onda ima smisla rješenje zadatka prikazati jedino grafički.

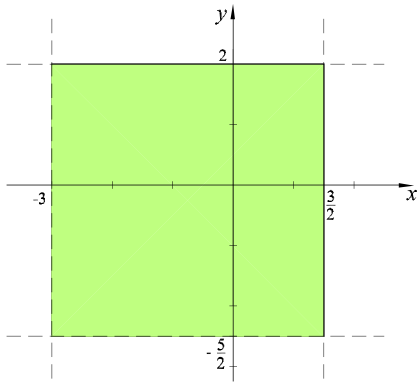
Rješenje prve nejednadžbe je svaki realni broj x, $x \in [-3, \frac{3}{2}]$, a druge svaki realni broj y, $y \in [-\frac{5}{2}, 2]$.

I što sada dalje?

Jer ovaj sustav je ipak za učenike neobičan. U prvoj nejednadžbi jedina je nepoznanica x, u drugoj nepoznanica je y. Pa što je onda rješenje sustava? Kako naći presjek dvaju skupova od kojih je jedan rješenje prve, a drugi rješenje druge nejednadžbe sustava?

Zanimljivo, kad zatražite od učenika da vam grafički prikažu skupove rješenja, oni spontano nacrtaju koordinatni sustav i rješenje prve nejednadžbe prikažu kao interval na osi x, a rješenje druge kao interval na osi y. Postoji dakle intuicija koja je usmjerena prema koordinatnoj ravnini.

Ipak je to sustav s dvije nepoznanice. Rješenja su stoga uređeni parovi realnih brojeva x i y. Skup svih rješenja sustava prikazan je grafički kvadratom. Koordinate x i y bilo koje točke s toga kvadrata rješenje su zadanog sustava nejednadžbi.



Upravo opisani prijelaz s pravca u ravninu je objektivna teškoća. Zadatak bi učenicima bilo lakše riješiti da je postavljen izravnije:

Iscrtaj skup svih točaka $T(x, y)$ ravnine čije koordinate x i y zadovoljavaju dani sustav nejednadžbi.

No onda bi njegova didaktička vrijednost sigurno bila manja.

I sada se vratimo na početak.

Hoće li nakon prethodno provedene ovakve obrade koordinatnog sustava biti lakše obrađivati grafičke prikaze i drugih algebarskih relacija i raznih realnih funkcija, a time i funkcije $f(x) = |x|$? Zasigurno da. Načelno razumijevanje suštine nekog sadržaja doprinosi lakšem razumijevanju pa onda i rješavanju pojedinačnih zadataka. Jedan od ciljeva nastave matematike jest razviti *globalni* osjećaj za pristup rješavanju nekog problema.