Metoda rekurzije

Zdravko Kurnik, Zagreb

U ovom odjeljku upoznat ćemo jednu metodu čija je primjena vrlo djelotvorna u području uređenih nizova brojeva. Kao uvodni primjer poslužit će nam zadatak koji su rješavali učenici I. razreda srednje škole na zadnjem općinsko-gradskom natjecanju.

Zadatak. *Zadana je funkcija* $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, *za koju vrijedi*

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathbf{Z}.$$

Ako je $f(1) = 2$, *odredite* $f(2004)$.

Rješenje. Iz formulacije zadatka razabiremo da je zapravo potrebno razmotriti jedan niz, niz vrijednosti funkcije f:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5),\ f(6),$$
$$f(7),\ f(8), \ldots, f(2004), \ldots .$$

U ovom nizu poznat je prvi član, a svaki drugi član određuje se pomoću prethodnog člana na temelju gornje formule. Tako se može naći i član $f(2004)$. Neprilika je jedino što je broj 2004 dosta velik pa bi za izračunavanje člana $f(2004)$ trebalo i dosta vremena. Među članovima niza sigurno postoji neka dublja veza. Pogledajmo:

$$f(1) = 2,$$
$$f(2) = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3,$$
$$f(3) = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{2},$$
$$f(4) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3},$$
$$f(5) = \frac{1+f(4)}{1-f(4)} = 2,$$
$$f(6) = \frac{1+f(5)}{1-f(5)} = -3,$$
$$f(7) = \frac{1+f(6)}{1-f(6)} = -\frac{1}{2},$$
$$f(8) = \frac{1+f(7)}{1-f(7)} = \frac{1}{3} \quad \text{itd.}$$

Odavde zaključujemo da se nakon svakih četiriju koraka članovi ponavljaju, tj. vrijedi jednakost $f(n+4) = f(n)$ za $n \in \mathbf{N}$. Sada nije teško naći traženi član:

$$f(2004) = f(2000) = \ldots = f(4) = \frac{1}{3}.$$

* * *

Gornji zadatak samo je zoran i jednostavan primjer primjene jedne važne metode. Mnogi nizovi razmatraju se na analogan način. Ta metoda naziva se **metoda rekurzije**.

Bit metode sastoji se u sljedećem.

Neka je (a_n) potpuno uređeni niz. Njegovi članovi mogu se određivati jedan za drugim ako su ispunjena ova dva uvjeta:

1° poznat je prvi član niza a_1;

2° postoji relacija koja povezuje opći član niza a_n s prethodnim članovima.

Relacija se naziva **rekurzivna relacija**, a za članove kažemo da ih određujemo **rekurzivno**. Ti pojmovi potječu od latinske riječi *recurrens — koji se vraća*.

U daljim razmatranjima ukratko ćemo opisati neke poznate rekurzije.

Suma $S_k(n)$

Sa $S_k(n)$ označena je suma k-tih potencija prvih n prirodnih brojeva. Za svaki broj k iz skupa $\mathbf{N}_0$ imamo jednu takvu sumu. Prema tome, u ovoj točki promatrat ćemo niz suma $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$, $\ldots$, $S_{k-1}(n)$, $S_k(n)$. Kako naći sumu $S_k(n)$? Pođimo redom.

1) Suma $S_0(n)$ je jednostavna i odmah nalazimo da je $S_0(n) = n$.

2) Sumu $S_1(n)$ prvih n prirodnih brojeva učenici obično dobro poznaju. Ona se može lako naći tako da se napiše s oba poretka pribrojnika i ti prikazi zbroje. Imamo

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 2 + n - 1 + n,$$
$$S_1(n) = n + n - 1 + n - 2 + \ldots + 3 + 2 + 1,$$
$$S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

3) Sumu $S_2(n)$ kvadrata prvih n prirodnih brojeva odredit ćemo na način koji će se pokazati vrlo djelotvornim. Promatrajmo jednakost

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Napišemo li ovu jednakost redom za $n=1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, i sve te jednakosti zbrojimo, dobivamo

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2(n) + 3S_1(n) + S_0(n).$$

Odavde nalazimo

$$S_2(n) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3} - S_1(n) - \frac{1}{3}S_0(n).$$

Vidimo da se suma $S_2(n)$ izražava pomoću prethodnih suma $S_1(n)$ i $S_0(n)$. Budući da te sume znamo, lako nalazimo da je

$$S_2(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

4) Sumu $S_3(n)$ kubova prvih n prirodnih brojeva određujemo koristeći jednakost

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Napišemo li ovu jednakost redom za $n = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, i sve te jednakosti zbrojimo, dobivamo

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n).$$

Odavde nalazimo

$$S_3(n) = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}S_2(n) - S_1(n) - \frac{1}{4}S_0(n).$$

Vidimo da se suma $S_3(n)$ izražava pomoću prethodnih suma $S_2(n)$, $S_1(n)$ i $S_0(n)$. Budući da te sume znamo, lako nalazimo da je

$$S_3(n) = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

5) Na posve analogan način može se izračunati svaka od suma $S_k(n)$. Za izračunavanje služi pomoćna jednakost

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1}n^k + \binom{k+1}{2} + \ldots + \binom{k+1}{1}n + 1.$$

Napišemo li ovu jednakost za $n=1, 2, 3, \ldots, n$, i sve dobivene jednakosti zbrojimo, nakon kraćeg računa dobivamo

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}(n+1)^{k+1} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}kS_{k-1}(n) - \ldots - S_1(n) - \frac{1}{k+1}S_0(n).$$

Odavde se suma $S_k(n)$ izračunava pomoću prethodnih suma $S_{k-1}(n), \ldots, S_1(n), S_0(n)$.

Navodimo još samo neke posebne rezultate:

$$S_4(n) = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$S_5(n) = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$

$$S_6(n)=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),$$

$$S_7(n)=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2).$$

Zanimljivo svojstvo sume $S_k(n)$ iskazuje sljedeća tvrdnja:

suma $S_k(n)$ polinom je od n $(k+1)-$ og stupnja, koeficijent uz najvišu potenciju n^{k+1} jednak je $\frac{1}{k+1}$, a koeficijent uz potenciju n^k ne ovisi o k.

Aritmetički niz

Krećemo od definicije:

niz brojeva (a_n) kod kojeg je razlika svakog člana i prethodnog člana stalan, naziva se **aritmetički niz**. Stalna razlika naziva se **diferencija** niza i označava sa d. Dakle:

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad a_n = a_{n-1} + d.$$

Već ova definicijska jednakost zapravo je **rekurzivna relacija** pomoću koje gradimo niz. Ovdje je potrebno da znamo prvi član niza a_1 i diferenciju d. Ostale članove niza tada određujemo rekurzivno: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $a_4 = a_3 + d$ itd.

Članove aritmetičkog niza možemo nalaziti i nešto drugačije, samo pomoću prethodnih članova. Naime, prema definiciji imamo $a_{n+2} - a_{n+1} = d$, $a_{n+1} - a_n = d$, a odavde slijedi da je

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Svaki član aritmetičkog niza je *aritmetička sredina* svojih susjeda. Podsjetimo se da je naziv aritmetički niz i nastao na temelju ovog karakterističnog svojstva niza. Gornja jednakost može se zapisati u obliku

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n.$$

Sada smo dobili **rekurzivnu relaciju** pomoću koje se svaki član aritmetičkog niza nalazi pomoću dvaju prethodnih članova. Da bi aritmerički niz bio određen, u ovom slučaju potrebno je zadati njegova prva dva člana a_1, a_2. Tada je $a_3 = 2a_2 - a_1$, $a_4 = 2a_3 - a_2$ itd.

Geometrijski niz

Krećemo od definicije:

niz brojeva (a_n) kod kojeg je kvocijent svakog člana i prethodnog člana stalan, naziva se **geometrijski niz**. Stalni kvocijent označava se s q.

Za geometrijski niz $a_1,\ a_2 = a_1q,\ a_3 = a_1q^2,\ \ldots,\ a_n = a_1q^{n-1}$ imamo očito najjednostavniju **rekurzivnu** relaciju

$$a_{n+1} = qa_n.$$

Fibonaccijev niz

Godine 1202. talijanski matematičar *Leonardo iz Pise* zvan *Fibonacci* objelodanio je svoje najpoznatije djelo *Liber Abaci*. U toj knjizi nalazi se sljedeći zanimljivi zadatak o razmnožavanju zečeva.

Netko je početkom godine doveo na pusti otok par novorođenih zečeva da bi doznao koliko će se parova zečeva roditi do kraja godine. Nakon navršena dva mjeseca života ovaj će mladi par dobiti prvi par mladih zečeva, a zatim će po par mladih zečeva dobivati nakon svakog mjeseca. Svaki novi par *dobivat će potomke na isti način. Koliko će parova zečeva biti na tom otoku na početku sljedeće godine?*

Jasno je da na početku drugog mjeseca još uvijek imamo samo jedan par. Na početku trećeg mjeseca rađa se novi par mladih zečeva, pa tako imamo 2 para. Na početku četvrtog mjeseca rađa se novi par i ukupan broj parova je sada 3 para. Početak petog mjeseca donosi na svijet dva nova para zečeva i ukupan broj parova raste na 5 parova itd.

Označimo broj parova zečeva na početku n-tog mjeseca sa F_n. Na početku $(n+1)$-og mjeseca broj parova zečeva je F_{n+1}. Na početku $(n+2)$-og mjeseca broj parova zečeva F_{n+1} povećava se za F_n, koliko je tog trenutka parova zečeva koji su stari barem dva mjeseca. Prema tome, veza brojeva parova dana je relacijom

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Ovo je **rekurzivna** relacija koja omogućuje rješenje zadatka. Imamo redom: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 2$, $F_4 = F_3 + F_2 = 3$, $F_5 = F_4 + F_3 = 5$, $F_6 = F_5 + F_4 = 8$, $F_7 = F_6 + F_5 = 13$, $F_8 = F_7 + F_6 = 21$, $F_9 = F_8 + F_7 = 34$, $F_{10} = F_9 + F_8 = 55$, $F_{11} = F_{10} + F_9 = 89$, $F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$, $F_{13} = F_{12} + F_{11} = 233$.

Na početku druge godine na otoku će biti 233 para zečeva.

* * *

Gornji zadatak je elegantno riješen i time kao da je stvar završila. Međutim, zadatak daje mnogo više. On je zapravo lijepa motivacija za uvođenje jednog važnog matematičkog objekta. Apstrahiramo li problemsku situaciju od zečeva, prirodno se nameće sljedeća definicija:

Niz brojeva (F_n) određen rekurzivnom relacijom $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ uz početne uvjete $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ naziva se **Fibonaccijev niz**, a njegovi članovi **Fibonaccijevi brojevi**.

Fibonaccijev niz je, dakle, građen ovako: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Fibonaccijevi brojevi imaju niz zanimljivih i važnih svojstava. Važna je i njihova primjena u mnogim područjima matematike. Evo nekih od svojstava:

1) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$
2) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$
3) $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$
4) $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1.$
5) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}.$
6) $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$
7) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2,\ F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$
8) $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$
9) $F_n | F_{2n}.$

Dokazi nekih svojstava su vrlo jednostavni i nadamo se da će ih čitatelji lako provesti.

Podjela ravnine pravcima

Svaki pravac ravnine dijeli ravninu na dvije poluravnine. Ako imamo više pravaca, onda su i te poluravnine podijeljene na dijelove različitih oblika. Tako nastaje sljedeći problem:

Neka je u ravnini zadano n pravaca $p_1, p_2, \ldots, p_n$ u općem položaju (nema paralelnih i ni koja tri ne prolaze istom točkom) i neka je $D_2(n)$ broj dijelova na koje ti pravci dijele ravninu. Koliki je $D_2(n)$?

Do relacije za veličinu $D_2(n)$ doći ćemo na dva različita načina.

1) Prvi način je induktivni pristup. Lako se uočava da jedan pravac dijeli ravninu na dva dijela, dva pravca na četiri dijela, tri pravca na sedam dijelova, četiri pravca na jedanaest dijelova itd. To znači da je

$$D_2(1) = 2,\ D_2(2) = 4,\ D_2(3) = 7,$$
$$D_2(4) = 11 \text{ itd.}$$

Te jednakosti možemo pisati malo drugačije:

$$D_2(1) = 1 + 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1,$$
$$D_2(2) = 3 + 1 = \frac{2 \cdot 3}{2} + 1,$$
$$D_2(3) = 6 + 1 = \frac{3 \cdot 4}{2} + 1,$$
$$D_2(4) = 10 + 1 = \frac{4 \cdot 5}{2} + 1 \text{ itd.}$$

Na temelju ovih jednakosti prirodno se nameće poopćenje:

Broj dijelova na koje n pravaca ravnine u općem položaju dijeli ravninu zadan je jednakošću

$$D_2(n)=\frac{n \cdot (n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Naravno, tu tvrdnju treba dokazati. Dokaz se provodi primjenom metode matematičke indukcije. To prepuštamo čitateljima.

2) Drugi način je primjena metode rekurzije. Da bismo odredili broj dijelova $D_2(n)$, promatrajmo broj dijelova $D_2(n-1)$ na koje $n-1$ pravac ravnine $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ dijeli ravninu, i $n-$ti pravac p_n. Dodavanjem n-tog pravca broj dijelova $D_2(n-1)$ povećava se za n (to je broj dijelova što ga $n-1$ pravac određuje na n-tom pravcu). Prema tome, vrijedi **rekurzivna relacija**

$$D_2(n) = D_2(n-1) + n.$$

Sada imamo redom

$$\begin{aligned}
D_2(2) &= D_2(1) + 2,\\
D_2(3) &= D_2(2) + 3,\\
D_2(4) &= D_2(3) + 4,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
D_2(n-1) &= D_2(n-2) + n - 1,\\
D_2(n) &= D_2(n-1) + n.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
D_2(n) &= D_2(1) + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n\\
&= 1 + (1 + \ldots + n)\\
&= 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}.
\end{aligned}$$

Podjela prostora ravninama

Analogno kao pravac u ravnini, svaka ravnina prostora dijeli prostor na dva poluprostora. Ako imamo više ravnina, onda nastaje podjela prostora na dijelove različitih oblika. Ovdje možemo postaviti dva zanimljiva problema.

Neka je u prostoru zadano n ravnina π_1, $\pi_2, \ldots, \pi_n$ *koje prolaze jednom točkom O, ali ni koje tri ne sadrže isti pravac, i neka je* $D_3^\circ(n)$ *broj dijelova na koje te ravnine dijele prostor. Koliki je* $D_3^\circ(n)$*?*

Neka je u prostoru zadano n ravnina π_1, $\pi_2, \ldots, \pi_n$ *u općem položaju (nema paralelnih ravnina, ni koje tri nisu paralelne nekom pravcu i ni koje četiri ne prolaze istom točkom) i neka je* $D_3(n)$ *broj dijelova na koje te ravnine dijele prostor. Koliki je* $D_3(n)$*?*

A) Razmotrimo prvi problem. To također možemo učiniti na dva načina.

1) Induktivni pristup. Zor nam pomaže da lako odredimo prva tri člana induktivnog niza. Vidljivo je da jedna ravnina dijeli prostor na dva dijela, dvije ravnine na četiri dijela, tri ravnine na osam dijelova itd. To znači da je $D_3^\circ(1) = 2$, $D_3^\circ(2) = 4$, $D_3^\circ(3) = 8$ itd.

Što se odavde može zaključiti? Svatko bi bez mnogo razmišljanja rekao da za n ravnina očito vrijedi sljedeće poopćenje:

$$D_3^\circ(n) = 2^n.$$

Način zaključivanja je dobar, ali jednakost nije točna! Premalo je bilo posebnih slučajeva da bi poopćavanje dalo pouzdaniji rezultat. Već za $n = 4$ broj dijelova nije 16, kako bi po formuli trebalo biti. Naime, četvrta ravnina π_4 ne dijeli svih 8 dijelova prethodnog slučaja na po dva dijela već samo 6 dijelova. Tako nastaje povećanje broja dijelova samo za 6, pa je

$$D_3^\circ(4) = 14.$$

Dalje je malo teže uspostaviti pravilnost gradnje desne strane formule, pa ovaj pristup završavamo.

2) Primjena metode rekurzije. Da bismo odredili broj dijelova $D_3^\circ(n)$, promatrajmo broj dijelova $D_3^\circ(n-1)$ na koje $n-1$ ravnina $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$ dijeli prostor, i n–tu ravninu π_n. Uočimo li da $n-1$ ravnina dijeli n-tu ravninu na $2(n-1)$ dijelova, onda se dodavanjem n-te ravnine broj dijelova prostora $D_3^\circ(n-1)$ povećava upravo za toliko dijelova. Prema tome, vrijedi **rekurzivna relacija**

$$D_3^\circ(n) = D_3^\circ(n-1) + 2(n-1).$$

Sada nije teško odrediti broj $D_3^\circ(n)$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
D_3^\circ(1) &= 2,\\
D_3^\circ(2) &= D_3^\circ(1) + 2,\\
D_3^\circ(3) &= D_3^\circ(2) + 4,\\
D_3^\circ(4) &= D_3^\circ(3) + 6,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
D_3^\circ(n) &= D_3^\circ(n-1) + 2(n-1).
\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti proizlazi

$$\begin{aligned}
D_3^\circ(n) &= 2 + 2(1+2+3+\ldots+(n-1))\\
&= 2 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n,
\end{aligned}$$

odnosno

$$D_3^\circ(n) = n^2 - n + 2.$$

B) Razmotrimo drugi problem. To također možemo učiniti na dva načina.

1) Induktivni pristup. Početak je sasvim analogan onom kod prvog problema. Razlika počinje u četvrtom koraku. Dodavanjem četvrte ravnine π_4 broj dijelova prostora ne povećava se na 16, već na 15 (vidite li to?). Tako dobivamo sljedeći induktivni niz:

$$D_3(1) = 2,\ D_3(2) = 4,\ D_3(3) = 8,$$
$$D_3(4) = 15 \quad \text{itd.}$$

Nastavak razmatranja prilično je neizvjestan.

2) Primjena metode rekurzije. Da bismo odredili broj dijelova $D_3(n)$, promatrajmo broj dijelova $D_3(n-1)$ na koje $n-1$ ravnina $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$ dijeli prostor, i n-tu ravninu π_n. Uočimo li da $n-1$ ravnina presijeca n-tu ravninu po $n-1$ pravcu i na taj je način dijeli na $D_2(n-1) = 1 + \frac{(n-1)n}{2}$ dijelova, onda se dodavanjem n-te ravnine broj dijelova prostora $D_3(n-1)$ povećava upravo za toliko dijelova. Prema tome, vrijedi **rekurzivna relacija**

$$D_3(n) = D_3(n-1) + 1 + \frac{(n-1)n}{2}.$$

Sada nije teško odrediti broj $D_3(n)$. Imamo redom

$$\begin{aligned}
D_3(1) &= 2,\\
D_3(2) &= D_3(1) + 1 + \frac{1\cdot 2}{2},\\
D_3(3) &= D_3(2) + 1 + \frac{2\cdot 3}{2},\\
D_3(4) &= D_3(3) + 1 + \frac{3\cdot 4}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
D_3(n) &= D_3(n-1) + 1 + \frac{(n-1)n}{2}.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti proizlazi

$$\begin{aligned}
D_3(n) &= 2 + n - 1 + \frac{1}{2}(1\cdot 2 + 2\cdot 3\\
&\quad + 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)n)\\
&= n + 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1).
\end{aligned}$$

Konačno je

$$D_3(n) = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$$

Rekurzivne jednadžbe

Jedan smjer istraživanja rekurzije su rekurzivne jednadžbe. Svi gore razmatrani nizovi rješenja su takvih jednadžbi. Posebno je važan pojam linearnih homogenih rekurzivnih jednadžbi, jer je njihova teorija dobro razvijena.

Definicija:

jednadžba oblika

$$f(n+k) = \alpha_1 f(n+k-1) + \alpha_2 f(n+k-2) + \ldots + \alpha_k f(n),$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}$, $\alpha_k \neq 0$, $k \in \mathbf{N}$ naziva se **linearna homogena rekurzivna jednadžba reda k**.

Riješiti gornju jednadžbu znači naći sve nizove f_n koji je zadovoljavaju.

Ovim jednadžbama nećemo se podrobnije baviti. Navest ćemo samo neke od takvih jednadžbi koje su u uskoj vezi s gore obrađenim nizovima.

1) Na temelju rekurzivne relacije $a_{n+1} = qa_n$ zaključujemo da je geometrijski niz rješenje linearne homogene rekurzivne jednadžbe prvog reda

$$f(n+1) = \alpha f(n).$$

2) Pri opisu aritmetičkog niza ustanovili smo rekurzivnu relaciju $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. To znači da je aritmetički niz rješenje linearne homogene rekurzivne jednadžbe drugog reda

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n).$$

3) Pri opisu Fibonaccijevog niza ustanovili smo rekurzivnu relaciju $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. To znači da je Fibonaccijev niz rješenje linearne homogene rekurzivne jednadžbe drugog reda

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n).$$

4) Promatrajmo niz kvadrata prirodnih brojeva $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$. Za taj niz iz jednakosti $f(n+1) = (n+1)^2$ slijedi $f(n+1) = f(n) + 2n + 1$, iz $f(n+2) = (n+2)^2$, slijedi $f(n+2) = f(n+1) + 2n + 3$, iz $f(n+3) = (n+3)^2$, slijedi $f(n+3) = f(n+2) + 2n + 5$. Eliminacijom slobodnih članova iz triju dobivenih jednakosti nalazimo da je naš niz rješenje linearne homogene rekurzivne jednadžbe trećeg reda

$$f(n+3) = 3f(n+2) - 3f(n+1) + f(n).$$

5) Promatrajmo niz kubova prirodnih brojeva $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3, \ldots$. Analogno prethodnim razmatranjima, za taj niz dobivamo da je rješenje linearne homogene rekurzivne jednadžbe četvrtog reda

$$f(n+4) = 4f(n+3) - 6f(n+2) + 4f(n+1) - f(n).$$

Više o rekurzivnim jednadžbama može se naći u navedenoj literaturi.

Zadaci s natjecanja

Na našim matematičkim natjecanjima povremeno se zadaju zadaci u kojima se pojavljuje **rekurzija**. Najčešće se radi o aritmetičkim i geometrijskim nizovima, ali ima i zadataka o drugim nizovima koji se definiraju rekurzivno. Evo nekoliko takvih zadataka.

1. *Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ definiran je ovako: $a_1 = 1$,*
   $$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}),\ n > 1.$$
   Odredite a_{1999}.

   (Općinsko natjecanje 1999., IV. razred)

2. *Izračunajte sumu*
   $$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots + \frac{a_k}{2^k} + \ldots,$$
   gdje je (a_n) niz brojeva definiran na ovaj način:
   $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ za $n > 2$.

   (Državno natjecanje 1999., IV. razred)

3. *Niz (a_n) zadan je rekurzivno s $a_0 = -1$,*
   $$a_n = \frac{2a_{n-1} - 3}{3a_{n-1} - 4},\ n \in \mathbf{N}.$$
   Odredite formulu za a_n.

   (Županijsko natjecanje 1998., IV. razred)

4. *Neka je* (a_n) *niz pozitivnih cijelih brojeva takav da je*
$a_1 < a_2$ i $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ za $n > 2$.
Ako je $a_7 = 120$, *koliko je* a_8?

(Županijsko natjecanje 1996., I. razred)

5. *Zadan je niz* $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$ *za svako* $n \in \mathbf{N}$. *Dokažite da se svaki prirodni broj može prikazati kao zbroj različitih elemenata tog niza.*

(Državno natjecanje 1995., IV. razred)

6. *Zadan je niz* (a_n) *rekurzivnom formulom*
$$a_n = \frac{a_n^2 + b}{2}, \quad 0 < b \leq 1, \quad a_0 = 0.$$
Pokažite da je niz konvergentan i izračunajte mu limes.

(Državno natjecanje 1993., IV. razred)

* * *

Gornji prikaz rekurzija ukazuje na potrebu da se učenici starijih razreda srednje škole podrobnije upoznaju s metodom rekurzije pri rješavanju složenijih zadataka o nizovima. Zadaci s natjecanja dobar su vodič koji pokazuje u kojem smjeru treba ići priprema naših naprednijih učenika za sigurniji nastup na matematičkim natjecanjima. Jedna matematička radionica s ovom temom znatno bi doprinijela toj sigurnosti.

Literatura

[1] B. Dakić, *800 godina stari zečevi*, Matematika i škola 16 (2002), 26–29.
[2] A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb 2000.
[3] N. Elezović, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Element, Zagreb 1992.
[4] A. I. Markuševič, *Vozvratnye posledovatel'nosti*, Nauka, Moskva 1975.
[5] G. Polya, *Matematičko otkriće* (prijevod s engleskog), HMD, Zagreb 2003.
[6] V. A. Uspenskij, *Treugol'nik Paskalja*, Nauka, Moskva 1966.
[7] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb 1989.
[8] N. N. Vorob'jov, *Čisla Fibonačči*, Nauka, Moskva 1964.

Veći, veći, i još veći...

U MŠ-u broj 18 pisali smo o najvećim dotad pronađenim prostim brojevima. No Michael Shafer, 26-ogodišnji student kemijskog inženjerstva na Michigan State University u Sjedinjenim Američkim Državama našao je novi, sada je to 40. poznat Mersenneov broj. To je broj $2^{20\,996\,011} - 1$, *u čijem je zapisu 6 320 430 znamenki, za čiji bi potpuni ispis trebalo oko 1 500 stranica. Ujedno je to i najveći poznat prosti broj.*

O pronalasku broja javila je organizacija GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) koja se i bavi upravo potragom za nepoznatim prostim brojevima. Snalažljivi i spretni trgovci već su otisnuli poster s ovim brojem, a uz njega isporučuju i povećalo.

Na slici je sretni Michael uz svoje Dell Dimension računalo s 2 GHz memorije i Intel Pentium 4 procesorom, na čijem je ekranu famozni broj bljesnuo 17. studenog 2003. u 14.30.