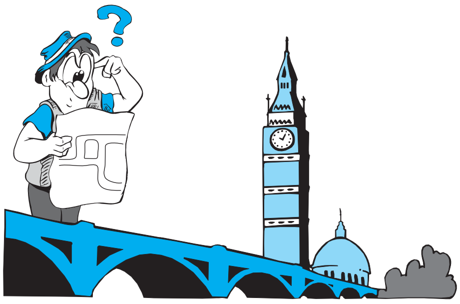
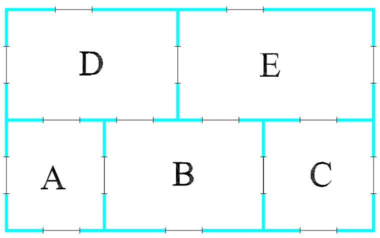
# U jednom potezu



***Branimir Dakić, Zagreb***

Kad sam bio mlad profesor na Gimnaaziji u Zaboku, jedan mi je učenik na papiriću donio zadatak koji mi se učinio jednostavnim, ali ga ipak nisam odmah uspio riješiti. I što sam mogao? Prokušan je recept: obećati da ćeš problem riješiti doma i na sljedeći ga sat donijeti u školu. To obično "upali", ali ne i ovoga puta. Koliko god sam se trudio, nije mi polazilo za rukom naći rješenje. A i kako bi (to sam tek poslije shvatio), kad je sličan problem rješavan godinama prije nego što je dospio u ruke velikom Euleru. Pogađate, riječ je o čuvenom problemu *Königsberških mostova*, kojim je na neki način začeta Teorija grafova, moderna grana matematike.

No, vratimo se mojem zadatku. Evo o čemu se radilo: *na slici je dan tlocrt neke kuće s prostorijama A, B, C, D i E, a na svakoj od prostorija po nekoliko je vrata*.




*Može li se u jednom obilasku proći kroz sva vrata, i to kroz svaka vrata točno jednom?*

Vratimo se problemu Königsberških mostova.

Grad Königsberg, nekad krunidbeni grad pruskih careva, danas je ruska enklava na Baltičkom moru. Grad je smješten na obalama rijele Proegel te na dvama otocima u rijeci. U 18. stoljeću dijelovi grada bili su povezani sa sedam mostova, onako kako je to vidljivo na ovoj staroj slici.

Problem o kojem je riječ glasi:

*može li se u jednoj šetnji proći svih sedam mostova i to tako da se svakim mostom prođe točno jednom?*

Euler je 1736. u pismu jednom svom prijatelju napisao:

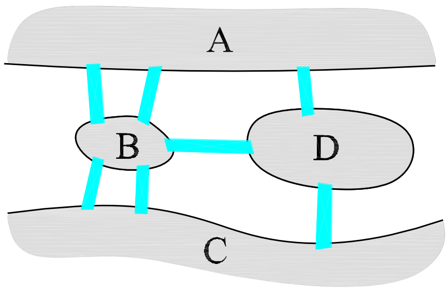
*Poslije duga razmišljanja našao sam jednostavno pravilo zasnovano na potpuno uvjerljivu dokazu, kojim je moguće za sve zadatke ove vrste časkom odrediti je li obilazak izvediv za bilo koji broj ma kako raspoređenih mostova*.

I dodaje:

*Ovo rješenje po svojem karakteru očito ima malo veze s matematikom i nije mi jasno zašto bismo ga prije očekivali od matematičara negoli od nekog drugog čovjeka. Ono počiva jedino na općem rasuđivanju i za njegovo iznalaženje nema potrebe posezati za bilo kakvim zakonima svojstvenim matematici. Ja ne znam kako to da pitanja koja imaju malo veze s matematikom, matematičari rješavaju prije drugih ljudi.*

Evo kako je Euler riješio problem.

Označimo s $A$ i $C$ obale rijeke, a s $B$ i $D$ otoke.




Pretpostavimo da smo polazeći s nekog od mjesta $A$, $B$, $C$ ili $D$ prošetali tako da smo prošli svim mostovima i to svakim točno jednom.

Dvije su mogućnosti:

1) Put smo završili na mjestu s kojeg smo i krenuli u šetnju.

U ovom slučaju zaključujemo da je svako od četiri područja $A$, $B$, $C$ i $D$ povezano s ostalima parnim brojem mostova. Naime, nakon što smo na neko od tih područja pristupili nekim mostom, morali smo to područje i napustiti, ali ne tim istim, već nekim drugim mostom.

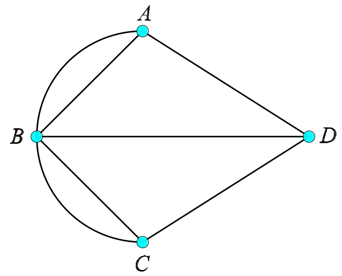
2) Put nismo završili na mjestu s kojeg smo krenuli u šetnju.

Tada s polazišta vodi jedan most ili njih neparno mnogo, a isto vrijedi i za područje na kojem šetnja završi. Ostala područja međusobno su vezana parnim brojem mostova.

Očito, ako su više od dva područja povezana s ostalima neparnim brojem mostova, šetnja prema uvjetima zadatka nije izvediva.

Sada uočavamo: s obala $A$ i $C$ vode po tri mosta, na otoku $B$ je pet mostova, na otoku $D$ su tri mosta. Sva četiri broja su neparna pa šetnja preko svih sedam mostova u kojoj bi se svakim mostom prošlo točno jednom, nije izvediva.

Sliku Köenigsberških mostova možemo pojednostavnjeno prikazati ovim grafom. Točke $A$, $B$, $C$ i $D$ zovu se čvorovima ili vrhovima grafa, a one su povezane spojnicama ili bridovima. Broj spojnica koje pripadaju jednom vrhu jest stupanj tog vrha. Tako su stupnjevi vrhova $A$, $C$ i $D$ jednaki 3, a stupanj vrha $B$ je 5.



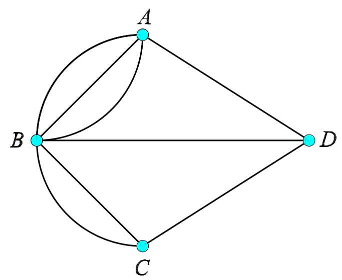

Problem obilaska mostova ekvivalentan je traženju odgovora na pitanje: *Je li moguće ovaj graf nacrtati u jednom potezu, ne podižući olovku s papira i ne prelazeći ponovno jednom već nacrtanom linijom?*

I kao što smo već prihvaćanjem Eulerova kriterija zaključili, to nije moguće.

Kad bismo imali još samo jedan most, uzmimo da vodi s obale $A$ na otočić $B$, šetnja prema danim uvjetima mogla bi se izvesti. Valjalo bi je započeti u $C$ ili $D$ i završila bi u onom drugom od ovih dvaju mjesta.

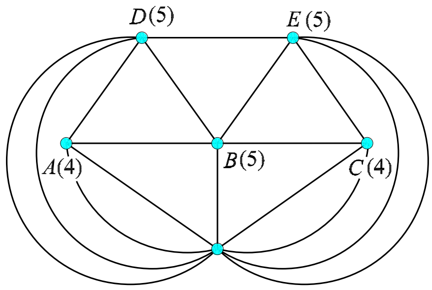
Slijedite, primjerice, ovaj put:

$$D \to A \to B \to A \to B \to C \to B \to D \to C.$$



I sada konačno riješimo i moj “zabočki zadatak”.

Umjesto tlocrta kuće nacrtajmo graf koji ilustrira našu situaciju. Prostorije su vrhovi toga grafa, obale u problemu s mostovima, a vrata su mostovi.



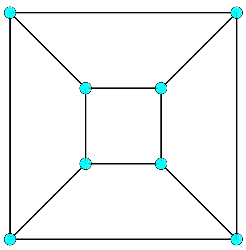

Pitanje možemo li se prošetati kućom tako da kroz svaka vrata prođemo samo jednom, zapravo je pitanje može li se ovaj graf nacrtati u jednom potezu. Odgovor je “ne”, jer je svih pet vrhova neparnog stupnja.

U jednom srednjoškolskom udžbeniku nalazimo i na ovakav zadatak:

*Može li mrav prošetati bridovima kocke, a da svakim bridom prođe točno jednom?*

Ovo je također jedan od problema koji je obuhvaćen prethodnim razmatranjima.

Zamislimo da imamo model kocke izrađen od žice. Prislonimo li ga na zid i postavimo ispred njezine prednje strane točkast izvor svjetlosti tada ćemo na zidu dobiti sliku kao na sljedećoj slici.



Kažemo da je to centralna projekcija kocke. Nju možemo shvatiti kao graf u kojem su vrhovi projekcije vrhova kocke, a spojnice su projekcije bridova kocke.

Sada naš zadatak možemo iskazati na sljedeći način.

*Možemo li ovu sliku nacrtati u jednom potezu?* Odgovor je negativan, jer su vrhovi ovog grafa neparnog stupnja.

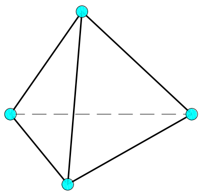
Postoji čitav niz drugih lijepih i jednostavnih zagonetki koje su vezane uz Teoriju grafova i koje je ona uspješno riješila.

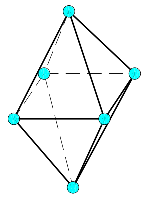
* * *

Evo na kraju još i nekoliko zadataka:

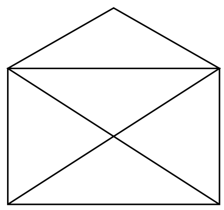
**1.** Može li mrav prošetati bridovima tetraedra tako da svakim bridom prođe točno jednom?

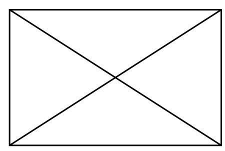
A može li takvu šetnju provesti po bridovima oktaedra?





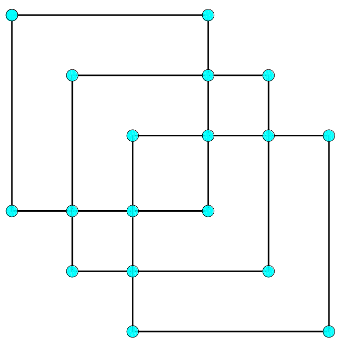
**2.** Možemo li u jednom potezu nacrtati otvorenu kovertu? A zatvorenu?



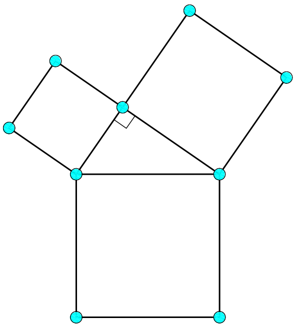


**3.** Dana su tri sukladna kvadrata u međusobnom položaju prikazanom na slici. Možemo li ovu sličicu nacrtati u jednom potezu?

Ovaj zadatak postavio je Lewis Caroll, autor čuvene “Alise u Zemlji čuda”.



**4.** Nad stranicama pravokutnog trokuta nacrtani su kvadrati. Može li se ova "Pitagorina figura" nacrtati u jednom potezu?

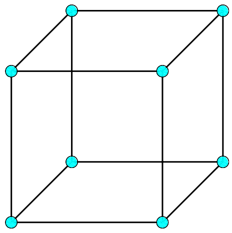


**5.** Može li se u jednom potezu nacrtati pravilni peterokut sa svim svojim dijagonalama?

Riješite isti zadatak za pravilni šesterokut i pravilni sedmerokut.

Pokšajte odgovoriti na isto pitanje za bilo koji pravilni mnogokut.

**6.** Možete li nacrtati kosu projekciju kocke u jednom potezu?



## VRANE BROJE DO TRI

*Čovjek je jedino živo biće na Zemlji koje su, uz ostalo, svjesno bavi i matematikom. Međutim, neki najosnovniji začeci brojanja mogu se naći u nekih životinja. Zanimljiv je, naprimjer, eksperiment koji je pokazao da vrane znaju "brojati" do – tri. Kod većih brojeva više se ne snalaze i miješaju ih. No treba znati i to da još i danas ima primitivnih plemenâ među ljudima koja broje samo do šest. Žele li izraziti neki veći broj od šest, svejedno koji, hvataju se rukom za glavu da bi time pokazali da je riječ o nekom "neizrecivo velikom" broju – za njihove pojmove – "poput broja vlasi na glavi". No, vratimo se vranama. Kako smo uspjeli saznati da one razlikuju brojeve od jedan do tri, ali ne dalje od toga?*

*Na zasijanu njivu došla su dva lovca s puškom i sakrila se u zaklon. Vrane su ih dakako na vrijeme spazile i s obilne gozbe odletjele na obližnje stablo. Kad je jedan od lovaca izašao iz zaklona i otišao, vrane su time nisu dale smesti, već su i dalje čekale u krošnji stabla. No kad je i drugi lovac otišao, doletjele su natrag na njivu i nastavile zobati zrnje. Znale su, dakle, brojati do dva. Slično se ponovilo uz idući pokus s tri lovca. Kad su došli, vrane su odletjele i sakrile se u krošnju drveta. Ni kad je otišao prvi, ni kad je otišao drugi lovac, vrane se nisu vraćale. Tek kad je otišao i treći, doletjele su natrag na njivu. Znači, one znaju brojati i do tri. Međutim, kad je analogni pokus napravljen sa četiri lovca, dogodilo se drugačije. Pošto su tri lovca otišla a četvrti je još bio u zaklonu, vrane su se počele vraćati na njivu. Dakle, do četiri ne znaju brojati.*

*Slični su se eksperimenti izvodili na raznim mjestima i uz razne uvjete, u različitim okolnostima, no rezultat je uvijek bio isti: vrane razlikuju brojeve od jedan do tri, no kod većih se više ne snalaze.*

(iz knjige V. Devidéa: "Zabavna matematika", str. 119)