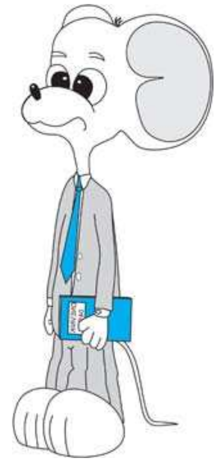

Individualizacija

Zdravko Kurnik, Zagreb

Nastava matematike danas je pretežno usmjerena na izvršavanje opsežnog plana i programa, a mnogi nastavnici svoj glavni zadatak vide u tome da učenici usvoje što više propisanog gradiva. U takvoj su nastavi matematike nerijetko zapostavljeni i slabiji i napredniji učenici.

Napredniji učenici u redovnoj nastavi s lakoćom usvajaju gradivo propisano programom i stječu znanja koja se temelje na nizu pravila, formula i umijeća rješavanja standardnih zadataka. Ali oni mogu više. S vremenom, budući da nisu dovoljno i primjereno opterećeni i da mogu bez napora usvojiti ono što se od njih traži, mogu steći pogrešan dojam da za učenje matematike i ne treba veliki napor ili mogu postepeno izgubiti volju za učenjem. Ako nastavnik postojano ne prati i ne potiče njihov razvoj, važan dio njihovih matematičkih sposobnosti može mirovati i neće se razvijati.

Slabiji učenici često imaju znatnih teškoća pri svladavanju nastavnog gradiva i s vremenom mogu steći pogrešan dojam da je matematika teži predmet nego što to uistinu jest. Budući da je nastavni proces zajednička aktivnost nastavnika i učenika, kvaliteta znanja matematike slabijih učenika u velikoj mjeri ovisi o kvaliteti tog odnosa. I baš u tom odnosu prema slabijim učenicima nastavnici matematike, posebno početnici, najčešće griješe. Zapostavljaju ih, i slabiji učenici još više zaostaju.

Nastavni proces i prenošenje znanja učenicima je složen proces. Da bi se povećala djelotvornost nastave, svi njezini dijelovi moraju se primjereno pripremati i uvažavati. Nastavnik matematike posebno treba uvažavati sljedeće osobine učenika: matematičke sposobnosti, mišljenje, pamćenje, sluh, vid, volju, karakter. Po tim osobinama mogu se znatno razlikovati i učenici istog uzrasta.

Zato se za uspješniju nastavu matematike kao prioritetan nameće **individualni pristup**. U tradicionalnoj organizaciji nastavnog procesa individualni pristup i njegovo ostvarenje nailaze na ozbiljne poteškoće. U razredu s većim brojem učenika nije lako voditi brigu o individualnim brzinama usvajanja gradiva. Pogotovo kada se radi o matematičkim sadržajima za čije je usvajanje potreban veći misaoni napor i viši stupanj apstrahiranja i poopćavanja.

Recimo još i to da se odnos prema **individualizaciji nastave** s vremenom bitno promijenio. Na početku se pod individualizacijom nastave podrazumijevalo samo osiguranje različitog tempa školskog rada učenika u skladu s njihovim osobinama i sposobnostima i naglašavalo da se slabiji učenik treba više spremati i vježbati, a bolji učenik manje. Danas je individualizacija nastave samostalan i važan problem. Povezan je s problemom usavršavanja nastavnog procesa i povišenja djelotvornosti nastave.

Kako u razrednoj organizaciji nastave matematike ostvariti individualni pristup učenicima? Suvremena metodika nastave matematike opisuje razne mogućnosti individualizacije nastave matematike. Navedimo najprije posebne nastavne sustave: dopunska nastava, dodatna nastava, problemska nastava, programirana nastava, izborna nastava, fakultativna nastava, mentorska nastava. Uvjet za izvođenje nekog od ovih sustava su matematičke sposobnosti posebnih skupina učenika.

Nas će u ovom radu više zanimati individualizacija nastave matematike u okvirima tradicionalne organizacije, za koju ne trebaju ni neki posebni uvjeti ni neka posebna sredstva ni neko posebno vrijeme, već sve ovisi o samom nastavniku matematike i njegovoj umješnosti. Neki dijelovi nastavnog procesa posebno su pogodni za ostvarivanje takve individualizacije. Opišimo ih.

Izbor iz nastavnog gradiva

U školskoj matematici postoje mnogi sadržaji koji se slično, analogno obrađuju. Nakon obrade jednog sadržaja, drugi sadržaj, bez obzira na njegovu težinu, može se obraditi lakše i brže. Takva nastavna situacija omogućuje nastavniku izmjenu nastavnog oblika i nastavne metode: rad s homogenim grupama može se (i treba) zamijeniti **individualnim radom**, a metoda dijaloga **metodom rada s tekstom**.

1) Dokazi tvrdnji da je svaka točka simetrale dužine jednako udaljena od njezinih krajeva i svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od njegovih krakova su analogni.

2) Formule $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ i $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ za duljine visina jednakostraničnog i jednakokračnog trokuta, $d = a\sqrt{2}$ i $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ za duljine dijagonala kvadrata i pravokutnika, $d = a\sqrt{3}$ i $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ za duljine dijagonala kocke i kvadra izvode se analogno.

3) Vièteove formule $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ za kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$ dobivaju se iz formula za rješenja x_1 i x_2. No, one se mogu dobiti i iz prikaza kvadratne jednadžbe u obliku $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ i uspoređivanjem koeficijenata. Taj način izvođenja može se lako prenijeti na izvođenje Vièteovih formula $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$, $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$ za kubnu jednadžbu $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, pa i za jednadžbe višeg stupnja.

4) Pri obradi kvadratne funkcije $f(x) = ax^2$ razlikuju se dva slučaja: $a > 0$ i $a < 0$. Obrada prvog slučaja počinje promatranjem posebnih kvadratnih funkcija $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, $x \mapsto 2x^2$, prave se tablice vrijednosti tih funkcija, crtaju grafovi i na kraju izvode neka njihova svojstva. Obrada drugog slučaja je, uz male preinake, posve analogna.

5) Prva jednakost $a \sin\beta = b \sin\alpha$ poučka o sinusima za trokut ABC izvodi se pomoću visine iz vrha C i trigonometrije pravokutnog trokuta. Analogno se izvodi druga jednakost $b \sin\gamma = c \sin\beta$, a iz dobivenih jednakosti i cijeli poučak.

6) Definicije $r_1 + r_2 = 2a$ i $|r_1 - r_2| = 2a$ elipse i hiperbole očito su slične:

Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke ravnine i $2a$ pozitivan realan broj veći od $|F_1F_2|$.

Skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka F_1 i F_2 stalan i jednak $2a$ zove se *elipsa*.

Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke ravnine i $2a$ pozitivan realan broj manji od $|F_1F_2|$. Skup svih točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od točaka F_1 i F_2 stalna i jednaka $2a$ zove se *hiperbola*.

Kako se izvodi jednadžba elipse? Elipsa se smiješta u koordinatni sustav tako da joj je središte O u ishodištu koordinatnog sustava, a osi na koordinatnim osima, i izvodi se jednadžba elipse u obliku $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Pokazuje se da se slično postavlja koordinatni sustav i izvodi jednadžba hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Uvjet diranja pravca $y = kx + l$ i elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ dobiva se rješavanjem tog sustava jednadžbi uz zahtjev da je presjek krivulja jedna točka. Rezultat je jednakost $a^2k^2 + b^2 = l^2$. Sasvim analogno izvodi se uvjet diranja $a^2k^2 - b^2 = l^2$ pravca $y = kx + l$ i hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Jednadžba $b^2xx_0 - a^2yy_0 = a^2b^2$ tangente na hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ u njenoj točki $T_0(x_0, y_0)$ izvodi se analogno kao jednadžba $b^2xx_0 + a^2yy_0 = a^2b^2$ tangente na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ u njenoj točki $T_0(x_0, y_0)$.

Ovdje je **individualizacija** vrlo korisna, jer učenicima omogućuje mala istraživanja. Pustimo ih da istražuju! Na taj se način nastavno gradivo povezuje, predavanje pojednostavnjuje, određeno ranije usvojeno gradivo se ponovo obnavlja i utvrđuje, a novo gradivo brže svladava.

Pravila

Raznovrsnost matematičkog gradiva zahtijeva podrobnu analizu i uočavanje i izdvajanje pojedinih njegovih dijelova koji su posebno važni i koje treba pamtiti. Među takve dijelove ubrajaju se i razna pravila, posebno pravila za brojeve. Evo nekih od njih:

$$(ab)^2 = a^2b^2, \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b},$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n,$$
$$|ab| = |a|\cdot|b|, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Metodika ukazuje na potrebu da se nakon dokaza nekog od gornjih pravila ono najprije proširi na više od dva broja, pa tek onda prijeđe na primjenu. Proširenja navedenih pravila su:

$$(abc)^2 = a^2b^2c^2,$$
$$(abcd)^2 = a^2b^2c^2d^2,$$
$$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c},$$
$$\sqrt{abcd} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d},$$
$$a^m \cdot a^n \cdot a^r = a^{m+n+r},$$
$$a^m \cdot a^n \cdot a^r \cdot a^s = a^{m+n+r+s},$$
$$(abc)^n = a^nb^nc^n,$$
$$(abcd)^n = a^nb^nc^nd^n,$$
$$|abc| = |a|\cdot|b|\cdot|c|,$$
$$|abcd| = |a|\cdot|b|\cdot|c|\cdot|d|,$$
$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c},$$
$$\sqrt[n]{abcd} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdot\sqrt[n]{d},$$
$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z.$$

Razmatranje proširenja vrlo je korisno. Prvo, proširenja se postižu primjenom analogije. Na taj način učenici bolje upoznaju taj važan znanstveni postupak. Drugo, dokazi proširenja provode se uzastopnom primjenom polaznog pravila. Na taj se način to pravilo neposredno nakon obrade uvježbava i znanje postaje trajnije. Konačno, formulacije proširenja i njihovi dokazi **individualnim radom** svih učenika vrijedan su doprinos razvoju njihovog stvaralačkog mišljenja.

Daljnji korak u razvoju mišljenja učenika je razmatranje poopćenja pravila. Novim razmatranjima razina mišljenja učenika se povisuje. Za mnoge učenika taj prijelaz s analogije na generalizaciju nije jednostavan ni lagan. Zato ga ne treba provoditi sa svim učenicima, ali isto tako ne bi bilo dobro kada bi nastavnik propustio priliku da naprednije učenike upozna s novom mogućnošću. Od njegove umješnosti poučavanja ovisi hoće li bar **naprednij učenici** uspjeti dostići tu razinu mišljenja i steći sposobnost poopćavanja. Bilo bi uistinu vrijedno kada bi učenici **individualnim radom** uspjeli naći sljedeća poopćenja navedenih pravila:

$$(a_1a_2\cdots a_n)^2 = a_1^2a_2^2\cdots a_n^2,$$
$$\sqrt{a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_2}\cdots\sqrt{a_n},$$
$$a^{m_1}\cdot a^{m_2}\cdots a^{m_n} = a^{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$
$$(a_1a_2\cdots a_k)^n = a_1^na_2^n\cdots a_k^n,$$
$$|a_1a_2\cdots a_n| = |a_1|\cdot|a_2|\cdots|a_n|,$$
$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdots\sqrt[n]{a_k},$$
$$\log_a(x_1x_2\cdots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n.$$

Dodatna pitanja i dodatni zadaci

Naprednije učenike u redovnoj nastavi treba dodatno opteretiti, tako da se njihove matematičke sposobnosti prirodno razvijaju. Jedan jednostavan način poboljšanja rada s naprednijim učenicima su **dodatni zadaci**. To su u pravilu složeniji i nestandardni zadaci. Oni mogu služiti produbljivanju gradiva koje se upravo obrađuje, ali mogu biti i izvan toga. Osnovni izvori za dodatne zadatke su zbirke zadataka, matematički časopisi i zbornici zadataka s matematičkih natjecanja. Svaki puta kad se ukaže prilika nastavnik treba naprednijim učenicima ponuditi na rješavanje dodatne zadatke. A takvih prilika za **individualni pristup** naprednijim učenicima uvijek ima: domaće zadaće, sat vježbanja i ponavljanja, sat provjeravanja znanja, školske zadaće i dr. **Dodatna pitanja** i češća matematička komunikacija na relaciji nastavnik matematike — napredniji učenici sigurno će nastavniku pomoći da pravilno procijeni njihove potrebe i pravac u kojem se kreće interes njegovih najsposobnijih učenika. Na taj način napredniji učenici mogu svojim sposobnostima steći primjereno znanje.

Dopunska pitanja i dopunski zadaci

Razlozi za poteškoće slabijih učenika u praćenju i usvajanju novog nastavnog gradiva najčešće su praznine u znanju. Kako su nastale te praznine? To je pitanje preko kojega olako prelazimo. Ako ništa drugo, treba nastojati popuniti te praznine. Za popunjavanje praznina služe, pored ostalog, i **dopunski zadaci**. To su u pravilu standardni zadaci, neposredno vezani uz gradivo koje učenici nisu usvojili na zadovoljavajući način, a koje je potrebno da bi se razumjelo novo gradivo.

Međutim, pravi zadatak svakog nastavnika matematike mora biti nastojanje da u redovnoj nastavi i slabiji učenici napreduju u skladu sa svojim matematičkim sposobnostima, a to znači treba od početka nastave matematike sprečavati nastajanje većih praznina u znanju pojedinih učenika. Jedna od mjera poboljšanja rada sa slabijim učenicima je češća matematička komunikacija na relaciji nastavnik matematike — slabiji učenici. Ako nastavnik uoči da na neko pitanje slabiji učenik daje nepotpun odgovor, pokazuje nesigurnost i nerazumijevanje obrađenog, onda on ne bi smio ostaviti učenika u takvom stanju prije nego što ustanovi uzrok učenikova nerazumijevanja, jer mu se prirodno nameću pitanja: Zašto učenik ne zna? Je li objašnjenje bilo dovoljno jasno? Je li pitanje teško? Ima li još učenika koji nisu sve razumjeli? Što su učenici zapisali u svoje bilježnice? Sada je pravi trenutak za **individualni pristup** učeniku. Treba ga osmjeliti da postavlja **dopunska pitanja**, razjašnjava svoje nerazumijevanje i tako svladava svoju nesigurnost.

Grupni rad

Jedna od slabosti tradicionalne nastave matematike je činjenica da se u njoj vrlo rijetko primjenjuje grupni rad. A grupni rad je izrazito djelotvoran način stjecanja znanja. Zapravo, **grupni rad** povezan s **individualnim radom** učenika daje najbolje rezultate u nastavnom procesu. Ta kombinacija rada osigurava primjeren razvoj svakog učenika, a nastavniku matematike omogućuje stalno praćenje njihovog napredovanja. Znamo da u grupi od 4–6 učenika svaki član grupe rješava svoj dio postavljenog zadatka. Na taj način rad u grupama je **individualiziran**, pa je grupni rad zapravo objedinjenje **individualnih radova** svih članova grupe.

Zadaci za ponavljanje i uvježbavanje

Nakon što se primjerima postigne jasnoća novog obrađenog gradiva, potrebno je provjeriti stupanj usvojenosti istog gradiva rješavanjem zadataka. To rješavanje obično se vrši na ploči. Početna zamisao tog postupka bila je dobra: učenik uz pomoć nastavnika rješava zadatak na ploči, dok ostali učenici istovremeno trebaju samostalno rješavati zadatak u svojim bilježnicama i samo povremeno kontrolirati je li njihovo rješenje isto kao i rješenje na ploči. Međutim, to se pokazalo nedjelotvornim. Upravo učenici koji teže usvajaju novo gradivo idu linijom manjeg otpora i njihov se rad svodi na prepisivanje rješenja s ploče. I mnogi nastavnici matematike podliježu toj navici i na kraju učenikova rada na ploči već je postalo neizbježno pitanje: "Jeste li prepisali?"

Ovo je pitanje i psihološki i obrazovni i metodički promašaj! Šta ovdje učenici imaju prepisivati i čemu to služi? Zar cilj nastave matematike nije da nakon obrade novog gradiva **svi** učenici znaju riješiti jednostavne i standardne zadatke? Jest. Zato nakon obrade novog gradiva treba prijeći na **individualni rad** učenika i putem kratkog pismenog rada izvršiti provjeravanje. Većom individualizacijom postiže se i veći uspjeh.

Domaća zadaća

Rješavanje zadataka za domaću zadaću je najčešći **individualni oblik rada** učenika. Ono treba biti njihova stalna navika. Ta će se navika prirodnije razvijati ako se pri zadavanju domaće zadaće nastoji smanjiti faktor prisile. To se može postići primjerenijim izborom zadataka za domaću zadaću i pristupačnijim zahtjevima nastavnika. Već samo zadavanje domaće zadaće treba biti brižljivo promišljeno i pripremljeno, ali i obavljeno na primjeren način. Pod tim se podrazumijeva: nastavnikov osvrt na izbor zadataka, čitanje tekstova od strane učenika, nastavnikova pitanja o razumijevanju zadataka, objašnjenja i upute za rješavanje težih zadataka, te potpuni ili djelomični pregled i provjera rješenja zadataka na sljedećem nastavnom satu.

Osim tradicionalnog načina izbora obaveznih zadataka, evo još nekoliko suvremenijih mogućnosti za zadavanje domaće zadaće kojima se pojačava **individualni rad** učenika:

1) učenici samostalno biraju koje će od predloženih zadataka rješavati,
2) učenici samostalno odabiru neke zadatke za domaću zadaću,
3) učenici sami sastavljaju neke zadatke za domaću zadaću.

Nije potrebno posebno naglašavati koliko bi se malo drugačijim odnosom prema domaćim zadaćama postigla i bolja psihološka priprema učenika za njihovo rješavanje.

Računalo

Računalo postupno ulazi u nastavu matematike kao važno pomagalo. Ono pruža pomoć nastavnicima i učenicima u prenošenju znanja i učenju, a ne služi samo kao sredstvo za brže i preciznije izvođenje operacija. Rad na računalu potpuno je **individualiziran**. Učenicima viših razreda osnovne škole rad na računalu može biti izvrsna motivacija za učenje matematike i razvijanje interesa za predmet, što je posebno važno za njihovo kasnije matematičko obrazovanje. U toj dobi računalo može pospješiti razvoj navike ustrajnog rada učenika, sposobnosti duže koncentracije za učenje određenog sadržaja, logičkog mišljenja i zaključivanja.

Postoji više računalnih programa koji su namijenjeni proučavanju i rješavanju matematičkih problema. Tako je, na primjer, računalni program *The Geometer's Sketchpad* napravljen za izučavanje planimetrije. Program omogućuje: usvajanje novih činjenica i postupaka, uvježbavanje naučenih postupaka, **otkrivanje** novih svojstava, primjenu novih znanja. Posebno je važno to što je *Geometer's Sketchpad* dinamičan program. To znači da pomicanjem nekog čvorišta i promjenom oblika crteža na ekranu ostaju nepromijenjeni odnosi među elementima objekta. Važna značajka programa je i činjenica da se **individualni rad** učenika ovim programom postupno razvija u **istraživački rad**.

Novi oblici rada

Matematika je bez sumnje težak nastavni predmet, pa pri usvajanju novog gradiva učenici osjećaju stanovit psihološki pritisak. Može li se tu nešto promijeniti? Može i mora, posebno u nastavi matematike u osnovnoj školi. Nisu dovoljne samo češće izmjene poznatih nastavnih metoda, potrebno je uvesti **nove oblike rada**, rad još više **individualizirati** i pokazati da matematika može biti lagana i zabavna. U nekim školama već se tako povremeno radi. Evo samo nekih od mogućnosti: *rješavanje matematičkih križaljki*, *kvizovi*, *zabavni zadaci*, *zabavni sati*, *matematičke igre*, *izrada panoa*, *izrada modela geometrijskih tijela*, *školski časopis* i dr. Naravno, uvođenje novih oblika rada zahtijeva od nastavnika matematike ozbiljnu pripremu i dodatni napor. Međutim, sve bi to trebalo biti neznatno prema zadovoljstvu koje bi trebao osjećati nastavnik matematike kada vidi interes učenika i njihovo usvajanje novog gradiva bez psihološkog opterećenja i prisile.

Literatura

[1] Z. Kurnik, *Analogija*, Matematika i škola 3 (2000), 101–109.
[2] Z. Kurnik, *Matematički zadatak*, Matematika i škola 7 (2000), 51–58.
[3] Z. Kurnik, *Suvremena metodika i nastava matematike*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, 187–201, Zagreb, 2000.
[4] Z. Kurnik, *Matematičke sposobnosti*, Matematika i škola 10 (2001), 195–199.
[5] Z. Kurnik, *Grupni rad*, Matematika i škola 22 (2003), 52–57.
[6] V. A. Oganesjan i dr., *Metodika prepodavanija matematiki v srednej škole*, Prosveščenie, Moskva, 1980.
[7] A. A. Stoljar, *Pedagogika matematiki*, Vyšejšaja škola, Minsk, 1969.