Glavolomke u geometriji prostora

Branimir Dakić, Zagreb

Često se može čuti kako je nastava matematike štura i ima premalo veze sa stvarnošću da bi učenicima bila bliska i zanimljiva. U dugim i zamornim vježbanjima izvjesnih (uglavnom) algebarskih postupaka oni ne vide smisao učenja matematike pa se ponekad moramo suočiti čak i s tako neugodnim i obeshrabrujućim pitanjem kao što je: *Zašto mi to učimo? Gdje će to meni trebati?* Odgovori kako učeći matematiku razvijamo logičko mišljenje, kreativnost i sl., i nisu baš osobito uvjerljivi. Neće pomoći niti argument kako i ostalo što uče u školi manje-više neće nigdje koristiti.

No takva i slična pitanja sigurno se neće postavljati osvježimo li našu nastavu povremenom uporabom računala, ali i drugim zanimljivim sadržajima kao što su crtice iz povijesti matematike, poneki primjer praktične primjene, ili pak neka zgodna zagonetka. A učenici baš vole kad im se postavljaju razne zgodne "glavolomke". Zato valja razmišljati i o tome na koji ih način ugraditi u nastavu i kako ih staviti u funkciju ciljeva učenja matematike. U ovom ćemo članku pokušati pokazati kako je to moguće ostvariti u nastavi geometrije prostora.

Geometrija prostora je dio gradiva koji je za obradu osobito delikatan i nerijetko se svodi na puko računanje površina i volumena geometrijskih tijela. To se nije uspjelo spriječiti niti njegovim svjesnim razdvajanjem u cjeline *Geometija prostora* i *Geometrijska tijela* u programima VIII. razreda osnovne i II. razreda srednje škole. Čak su i autori nekih udžbenika, ne razumijevajući idejni smisao ove podjele, spojili te dvije cjeline u jednu.

Odnosi točaka, pravaca i ravnina u prostoru središnje je i temeljno gradivo geometrije prostora. U njemu se razmatraju osnovne spoznaje o prostoru, razvija prostorni zor i uči kako razrješavati izvjesne probleme vezane uz međusobni odnos objekata u prostoru (kut pravca i ravnine, kut dviju ravnina, paralelnost, okomitost, mimoilaznost itd.). Ne može se prihvatiti opravdanje kako se isti ciljevi ostvaruju i kroz rješavanje zadataka vezanih uz računanje oplošja i obujma geometrijskih tijela, jer je ipak činjenica da je naglasak na sasvim različitim ciljevima i da je riječ o sasvim drugom metodičkom pristupu. Obrada geometrijskih tijela ne smije se svesti samo na puko računanje, već treba osmisliti probleme kojima bi se potpunije obradile važne osobine tih objekata i koji bi ukazivali na razne praktične primjene. S druge strane, ne smije se smetnuti s uma kako obrada geometrije prostora za neke učenike može biti vrlo složena i to zbog toga što je prostorni zor sposobnost koja nije jednako razvijena kod svakoga.

Razvijanju prostornog zora i uspješnijem usvajanju činjenica iz geometrije prostora mogu doprinijeti jednostavni i zanimljivi problemi. Njihovo rješavanje može potaknuti raznovrsne oblike rada, kao što su grupni rad, terenski rad, izrada prezentacija, izrada modela i postera i sl., a završni čin obrade mogla bi biti svojevrsna "Matematička izložba". U tom smislu obrade manjih i zaokruženih tema pružaju vrlo lijepe mogućnosti kreativnog rada i učenika i nastavnika. Navedimo nekoliko primjera.

1. Bojenje poliedara

Podsjetimo se jednog jednostavnog zadatka:

Ako kocku s duljinom brida n (n je prirodni broj) obojimo pa je razrežemo na n^3 *malih kockica, koliko će biti kockica sa samo jednom, koliko s dvije, koliko s tri, a koliko niti s jednom obojenom stranom?*

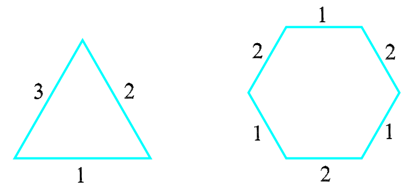
Zadatak se u pravilu javlja za konkretnu kocku, dosta je poznat i stoga će ga učenici možda lako riješiti. No problem možemo poopćiti, tj. postaviti ga upravo onako kako smo to učinili. Tada to znatno otežava njegovo rješavanje.

Isto tako možemo postaviti i sljedeći problem bojenja:

Koliko je boja najmanje potrebno za bojenje strana kocke ako želimo da dvije strane sa zajedničkim bridom budu obojene različitim bojama?

Nakon što se riješi ovaj zadatak možemo postaviti isto pitanje za bilo koju prizmu. Lako ćemo zaključiti da svake dvije pobočke trostrane prizme imaju zajednički brid pa su nam za bojenje njezina pobočja potrebne tri boje. A kako svaka pobočka ima zajednički brid sa svakom od dviju baza, onda nam treba još jedna boja, ukupno, dakle, četiri.

No za bojanje četverostrane prizme dovoljne su tri boje.



I sada slijedi poopćenje:

ako je osnovka prizme mnogokut s neparnim brojem stranica, za bojenje takve prizme na opisani način potrebne su četiri boje. Ako je pak broj stranica paran, dovoljne su tri boje.

Dalje se može nastaviti rješavanjem problema za piramide, potom i za pravilne poliedre. A ovdje se može i ispričati povijest jednog od povijesno najpoznatijih i najpopularnijih matematičkih problema, *Problema četiriju boja*.

2. Problem najkraćeg puta u prostoru

I ova tema otvara se jednim zadatkom:

Ako je u jednom kutu sobe pauk, a u drugom, dijagonalno suprotnom, muha, koji je najkraći put kojim se pauk treba kretati po zidovima sobe da bi došao do muhe? Pretpostavlja se da soba ima oblik kvadra.

Razgrnimo strane kvadra (zidove sobe) u ravninu i na dobivenoj mreži nastavimo rješavanje zadatka. Najkraća spojnica dviju točaka u ravnini je dužina. Spojimo dužinom točke u kojima su pauk i muha i ta je spojnica traženi najkraći put. Mrežu zatim opet spojimo u kvadar.

Slijedi pitanje: koliko rješenja ima postavljeni zadatak?

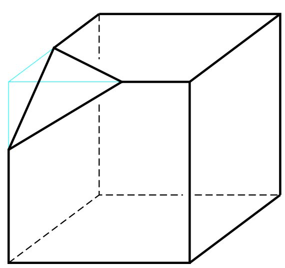
Problem najkraćeg puta može se postaviti i uz obradu drugih tijela. Primjerice, odredite najkraći put između dviju točaka na plaštu valjka. Takav je put luk cilindrične spirale. Problem najkraćeg puta između dviju točaka na sferi dovodi do veze matematike i geografije ([2], [3]).

3. Eulerova formula $v + s = b + 2$

Eulerova je formula jedna od najljepših formula cijele matematike i sasvim neopravdano nije uvrštena u programe geometrije srednjih škola. Ta formula povezuje brojeve strana (s), bridova (b) i vrhova (v) konveksnog poliedra.

Učenici mogu provjeravati formulu na primjerima prizme $(v = 2n,\ s = n + 2,\ b = 3n)$ ili piramide $(v = n + 1,\ s = n + 1,\ b = 2n)$. Ova se formula pojavljuje pri rješavanju brojnih zadataka vezanih uz poliedre.

Uzme li se kocka i odreže joj se "vrh" ravninom koja siječe tri brida što se sastaju u jednom vrhu, ali tako da presjek bude trokut, za dobiveno tijelo vrijedit će Eulerova formula.



Može se provjeriti da ona vrijedi i za svako tijelo koje se dobije nastavimo li opisani postupak.

Naime, svakim se presjekom broj strana poveća za jednu, broj bridova za 3, a broj vrhova za 2 (Eulerova formula).

Eulerovu formulu primjenjujemo pri dokazu da postoji točno pet pravilnih poliedara, [2]. Primjene ove formule u geometriji, teoriji grafova i topologiji uistinu su vrlo brojne.

4. Pravilni poliedri

Pravilni su poliedri osobito zgodna i zanimljiva tema, a ona se nerijetko preskače. Učenje o pravilnim poliedrima može se povezati sa sadržajima kemije, zanimljivo je i njihovo mjesto u filozofiji (Platonova atomistička teorija), a tu je i umjetnost (primjerice Leonardo) s neizbježnim zlatnim rezom ([1], [2]).

Brojne su i prelijepe web stranice posvećene pravilnim poliedrima. Ovdje bih preporučio dvije: `www.cs.mcgill.ca/~sqrt/unfold/unfolding.html` i `http://personal.telefonica.terra.es/web/mja/Prometeo/ejemplos/regpoly.html`.

5. Prostorni kut ili rogalj

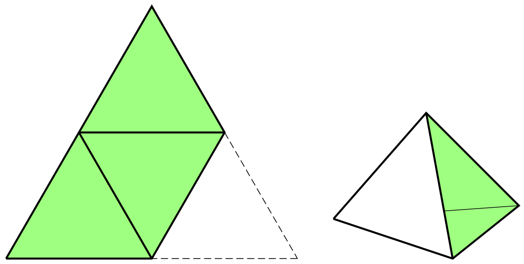
Ovaj se pojam također izgubio iz naših programa i udžbenika. Ja i opet mislim — neopravdano. I njegovu bismo obradu mogli započeti rješavanjem jedne jednostavne "glavolomke":

Izrežite trokut od komada papira. Zatim bez rezanja, samo savijanjem, složite od tog trokuta trostranu piramidu.

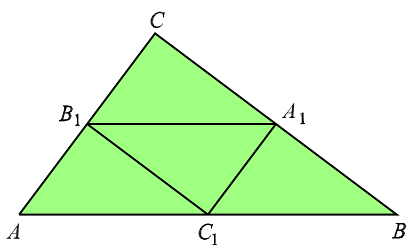
Ovo neće biti težak zadatak. Ako odredimo srednjice trokuta, onda će se savijanjem papira složiti piramida u čijem će se vrhu spojiti tri vrha trokuta.

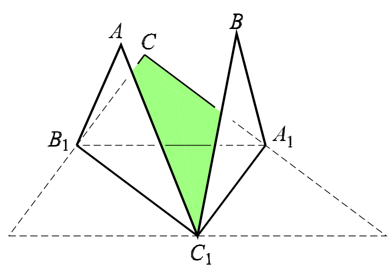
Ako krenemo od jednakostraničnog trokuta i provedemo opisani postupak, na ovaj način složit ćemo pravilni tetraedar.

No, može se dogoditi da neki učenici izrežu tupokutan, a neki možda i pravokutan trokut. Dapače, to bi se od dijela učenika moglo i zahtijevati. Oni neće uspjeti riješiti zadatak. Zbog čega? Koji je razlog? Potražimo ga.



Neka je $\triangle ABC$ tupokutan trokut i neka su A_1, B_1, C_1 polovišta njegovih stranica. Kada trokut savijemo oko njegovih srednjica $\overline{B_1C_1}$ i $\overline{C_1A_1}$ s namjerom da spojimo vrhove A i B, shvatit ćemo kako je kut $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \gamma$ prevelik da bismo ga natkrili dvama kutovima $\sphericalangle AC_1B_1 = \beta$ i $\sphericalangle A_1C_1B = \alpha$. Naravno, uzrok je to što je trokut $\triangle ABC$ tupokutan, s tupim kutom γ, pa je $\gamma > \alpha + \beta$.





Uvodi se pojam prostornog kuta te se dalje razvija obrada.

No isti zadatak možemo postaviti i za kvadrat i za pravilni peterokut.

Rješenje postavljenog problema pokazuje kako uz izvjesne uvjete postoje trostrane piramide čije su sve strane sukladni raznostranični trokuti. Takva je piramida jedan mogući analogon raznostraničnog trokuta i ona je vrlo zanimljiva za izučavanje ([2]).

Eto, naveli smo nekoliko tema koje dopunjuju nastavu geometrije prostora nekim zanimljivim sadržajima. Uvjerio sam se koliko su učenici željni takvih stvarčica. Dodao bih još i pitanja vezana uz projekcije podskupova prostora na jednu ravninu

I na kraju bih dodao: i dobro odabranim primjerom uz dobro osmišljenu obradu može se postići mnogo. Ovih sam dana s učenicima II. razreda opće gimnazije rješavao sljedeći zadatak:

koliko se metara bakrene žice promjera 1 mm može dobiti od jednog kilograma bakra (gustoća bakra je $\rho = 8.9\ g\,cm^{-3}$)?

Jednostavan problem i čini se ništa posebno. Pa ipak! Najprije smo izračunali da 1 kg bakra zauzima obujam od 112.36 cm^3. I sada se ovdje zastalo pa zaključilo da bi se od 1 kg bakra zapravo mogla oblikovati kockica s bridom koji je (nešto) manji od 5 cm. Ovakav zaključak daje dojam o tome što zapravo znači gustoća neke tvari.

Kad se dobio konačan rezultat (d = 143 metra), i on je bio iznenađujući, jer je žica promjera 1 mm prilično "debela". Zatim se postavilo pitanje koliko bismo metara žice dobili da je njezin promjer bio upola manji. Rezultat je 572 m, dakle dobili bismo žicu 4 puta veće duljine. Zašto? Pa zato što je obujam valjka kvadratna, a ne linearna funkcija duljine polumjera osnovke.

I konačno, kad je riječ o geometriji prostora, gotovo da se zaboravilo na izradu modela geometrijskih tijela od papira ili drveta, uopće na svaki samostalan praktični rad učenika. Upravo su takvi radovi didaktički vrlo korisni, jer se zorno, na djelu vidi što se događa.

Literatura

[1] Bombardelli, Mea, *Eulerova formula*, Matematika i škola 19/2003.

[2] Dakić, Branimir, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] Dakić, Branimir, *Najkraći put*, Matematika i škola 18/2003.