Kolinearnost

Branimir Dakić, Zagreb

Kolinearnost točaka u ravnini jedna je od onih tema u nastavi matematike u srednjoj školi koja se pojavljuje u nekoliko navrata u različitim programskim sadržajima. Na nju nailazimo u planimetriji prvog razreda, zatim pri obradi vektora te pri analitičkoj obradi pravca. Stoga je to primjer sadržaja koji je pogodan za cjelovitu obradu u obliku seminarskog ili maturalnog rada, ili nekog drugog nestandardnog oblika rada.

U ovom članku prikazat ćemo jednu moguću analitičku obradu pojma kolinearnosti.

Skup točaka je **kolinearan** *ako sve točke skupa pripadaju jednom pravcu.*

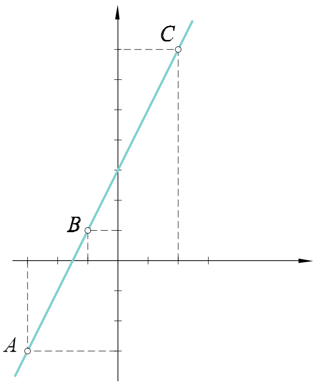
Kako provjeriti pripadaju li tri zadane točke u ravnini nekom pravcu? Za primjer uzmimo sljedeći zadatak:

Zadatak. Pripadaju li točke $A(-3,-3)$, $B(-1,1)$ i $C(2,7)$ jednom pravcu?

Prikažimo tri zadane točke u koordinatnoj ravnini. Prema slici, čini se da je odgovor potvrdan, da su točke A, B i C uistinu kolinearne. Ali to nije pravi matematički argument.

Kako onda odgovoriti na postavljeno pitanje?

Postoji niz mogućnosti. Razmotrimo neke od njih.



* * *

(1) Jedan od kriterija koji određuju uvjet kako bi tri točke pripadale jednom pravcu vezan je uz udaljenosti tih točaka.

Naime, ako za točke A, B i C vrijedi

$$|AB|+|BC|=|AC|,$$

te su točke kolinearne, one leže na jednom pravcu. Pritom je točka B na pravcu AC smještena između točaka A i C.

I sada, prema formuli za udaljenost dviju točaka u ravnini,

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2},$$

računamo:

$$|AB|=\sqrt{20}=2\sqrt{5};$$
$$|BC|=\sqrt{45}=3\sqrt{5};$$
$$|AC|=\sqrt{125}=5\sqrt{5}.$$

Očito je $|AC|=|AB|+|BC|$, čime je ispunjen uvjet kolinearnosti, tj. točke A, B i C pripadaju jednom pravcu.

No, ako želimo da neka točka $T(x,y)$ pripada istom pravcu, dakle, pravcu koji povezuje točke A, B i C, onda je dovoljno postaviti uvjet:

$$|AT|+|TB|=|AB|.$$

Tada dobijemo:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{8}.$$

Kad ovu jednakost "sredimo" (izoliramo jedan korijen na jednoj strani jednadžbe pa jednadžbu kvadriramo, i još jednom ponovimo isti postupak), dobit ćemo jednadžbu

$$4x^2+y^2-4xy+12x-6y+9=0.$$

Tu jednadžbu možemo zapisati u obliku $(2x-y+3)^2=0$, a odatle slijedi $2x-y+3=0$. I to je uvjet da neka točka $T(x,y)$ ravnine pripada pravcu AB. Ona mora biti oblika $T(x,2x+3)$. Takva je očito i točka $C(2,7)$.

Dakako, jednadžba $2x-y+3=0$ je jednadžba pravca koji je određen točkama A i B.

Napomenimo još kako se isti rezultat dobije ako krenemo od bilo kojeg rasporeda točaka A, B i T.

* * *

(2) Druga mogućnost provjere kolinearnosti triju zadanih točaka utemeljena je na računanju površine trokuta.

Ako je trokut $\triangle ABC$ zadan koordinatama svojih triju vrhova, njegovu površinu računamo po poznatoj formuli

$$P=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|.$$

Uzmimo koordinate zadanih triju točaka, A, B i C iz našeg zadatka i uvrstimo ih u ovu formulu. Dobivamo:

$$P=\frac{1}{2}|-3(1-7)-1(7+3)+2(-3-1)|=\frac{1}{2}|18-10-8|=0.$$

Očito, površina trokuta jednaka je nuli, a to znači da točke A, B i C leže na jednom pravcu.

No ovdje možemo odgovoriti na opće pitanje: *Uz koji će uvjet neka točka $T(x,y)$ pripadati istom tom pravcu?*

Želimo li da točka T pripada pravcu AB, mora biti ispunjen uvjet $P_{\triangle ABT}=0$. Dakle, mora biti

$$P=\frac{1}{2}|-3(1-y)-1(y+3)+x(-3-1)|=0.$$

Odatle se dobije $2x-y+3=0$. Dakle, ukoliko neka točka $T(x,y)$ pripada pravcu koji je određen točkama $A(-3,-3)$ i $B(-1,1)$, njezine koordinate x i y moraju zadovoljavati uvjet $2x-y+3=0$.

Općenito, iz $P(\triangle ABT)=0$ za dvije zadane točke A i B dobije se uvjet da neka točka T ravnine pripada pravcu AB. A taj je uvjet zapravo poznata jednadžba pravca kroz dvije točke. Pokušajte to izvesti.

* * *

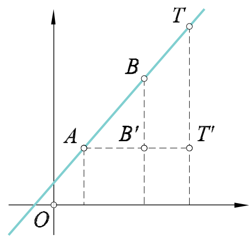
(3) Dvjema točkama, $A(-3,-3)$ i $B(-1,1)$ određen je pravac čiju jednadžbu određujemo uvrštavanjem koordinata dviju danih točaka u formulu

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1).$$

Na ovaj način dobijemo jednadžbu koja glasi: $2x-y+3=0$. Odmah primijetimo kako je to ona ista jednadžba koju smo pod (2) dobili iz uvjeta $P=0$.

Jednadžbu pravca kroz dvije točke možemo zapisati u obliku $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Što ovaj zapis zapravo kaže? On izražava jednakost nagiba pravca AB i AT. Ili geometrijski rečeno, njime je zapisano da su trokuti $\triangle AT'T$ i $\triangle AB'B$ slični. Uvjet sličnosti je jednakost odgovarajućih kutova, odnosno proporcionalnost duljina odgovarajućih stranica dvaju trokuta.



U svakom slučaju, riječ je o uvjetu kolinearnosti.

* * *

(4) Uvjet kolinearnosti triju točaka A, B i C vrlo se jednostavno izražava vektorskom jednadžbom

$$\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB},$$

gdje je k realan broj.

U našem je primjeru $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}+10\vec{j}$ te $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+4\vec{j}$, i očito je $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Ako pak želimo da neka točka $T(x,y)$ pripada istom pravcu, onda je uvjet za to $\overrightarrow{AT}=k\cdot\overrightarrow{AB}$. Tako dobijemo vektorsku jednadžbu

$$(x+3)\cdot\vec{i}+(y+3)\cdot\vec{j}=k\cdot(2\vec{i}+4\vec{j}).$$

Iz nje se dobiju parametarske jednadžbe pravca $x=2k-3$, $y=4k-3$, pri čemu promjenom vrijednosti realnog broja (parametra) k dobivamo koordinate x i y točke T na pravcu AB.

Eliminacijom parametra k iz sustava $x=2k-3$ i $y=4k-3$ dobit ćemo jednadžbu $2x-y+3=0$, i opet naravno jednadžbu pravca AB.