Put skakača po šahovskoj ploči

Branimir Dakić, Zagreb

U mnoštvu raznovrsnih matematičkih zagonetki posebno mjesto zauzimaju one vezane uz šah. Jednom od najpoznatijih među njima bavio se i veliki Leonhard Euler (1707. – 1783.). U pismu što ga je 26. travnja 1757. uputio petersburškom akademiku Goldbachu, Euler pita:

Može li skakač obići šahovsku ploču tako da uzastopnim skokovima točno jednom doskoči na svako njezino polje?

Ako pojedina polja šahovnice shvatimo kao točke, a poteze skakačem kao njihove spojnice, onda je svaki izbor poteza jedan graf. Želimo li još da skakač svoj put završi na početnom polju, na polju s kojega je krenuo u obilazak, onda je u suvremenom izričaju problem ekvivalentan pitanju: postoji li u opisanom grafu *Hamiltonov put*? Postoji li, drugim riječima, put po spojnicama grafa koji svakim vrhom prođe točno jednom i koji završi u vrhu iz kojega je krenuo?

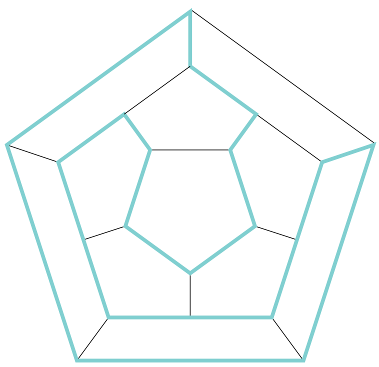
Naime, veliki irski matematičar Sir William Rowan Hamilton postavio je 1859. zagonetku poznatu kao *"Problem trgovačkog putnika"*.

Taj problem je u svojem izvornom obliku vezan uz model pravilnog dodekaedra čiji vrhovi predstavljaju gradove, a bridovi putove koji spajaju te gradove.

Hamiltonovo pitanje glasi:

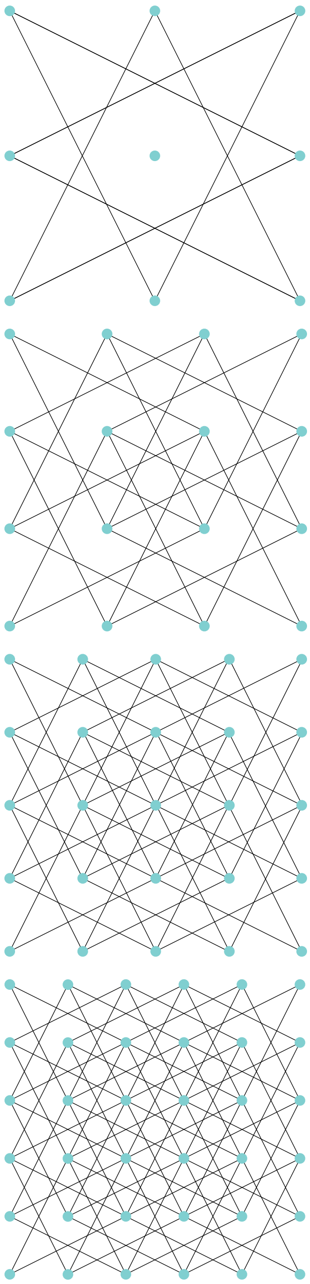
može li trgovački putnik obići sve te gradove tako da u svaki svrati točno jednom i da se vrati u grad iz kojega je pošao?

Na slici, gdje je centralna projekcija pravilnog dodekaedra shvaćena kao graf, vidimo jedno rješenje postavljenog problema.



No vratimo se početnom zadatku.

Nije teško pronaći rješenje zagonetke za manju ploču. Na slici vidimo po jedno rješenje za ploče tipa $n \times n$, za $n = 3, 4, 5$ i 6.



No samo prebrajanje svih mogućih propisanih obilazaka zapravo je neizvedivo bez pomoći jakih računala. Primijetimo kako na ploči $n \times n$ nema zatvorenih putova ako je n neparan broj. Na ploči 6×6 ukupno je 9 862 takvih putova. Martin Loebling i Ingo Wegener su 1995. g. nakon četveromjesečna neprekidnog rada na više računala objavili rezultat: postoji 33 439 123 484 294 različitih Hamiltonovih obilazaka standardne šahovske ploče. No 1997. g. Brendan McKay dobio je rezultat da je takvih obilazaka 13 267 364 410 532, a ovaj je njegov rezultat 2000. g. potvrdio i Wegener. U svakom slučaju to su veliki brojevi.

No pustimo te brojeve kraju, neka se njima bave računarski virtuozi, a mi se vratimo samom problemu. Zanimljivo je da je on, uz Eulera (čije su analize rješenja ovoga, kao i nekih drugih popularnih problema, utjecale na razvitak osnova Teorije grafova) zaokupio pozornost još nekih poznatih matematičara, primjerice Taylora, De Moivrea, Lagrangea.

A zbog čega ovdje uopće govorimo o problemu skakača?

Evo odgovora:

ako bismo s nekog polja šahovske ploče skakačem krenuli u njezin obilazak pa na pojedina polja upisivali redni broj poteza kojim je skakač na njega doskočio, tako bismo u svih 64 polja kvadrata smjestili brojeve od 1 do 64.

50	*11*	*24*	*63*	*14*	*37*	*26*	*35*
23	*62*	*51*	*12*	*25*	*34*	*15*	*38*
10	*49*	*64*	*21*	*40*	*13*	*36*	*27*
61	*22*	*9*	*52*	*33*	*28*	*39*	*16*
48	*7*	*60*	*1*	*20*	*41*	*54*	*29*
59	*4*	*45*	*8*	*53*	*32*	*17*	*42*
6	*47*	*2*	*57*	*44*	*19*	*30*	*55*
3	*58*	*5*	*46*	*31*	*56*	*43*	*18*

Zbroj svih brojeva u pojedinom retku ili stupcu jednak je 260. No zbroj brojeva na jednoj dijagonali je 168, a na drugoj 384, pa tako dobiven kvadrat baš i nije magičan. Kako bi se ipak uvažila njegova "polumagičnost", on se ponekad i naziva *polumagičnim kvadratom*.

Ovdje nije kraj priče o lutanjima skakača po šahovskoj ploči. Matematičari su se bavili i istraživanjima Hamiltonovih putova po bilo kojoj pravokutnoj ploči pa tu ima više vrlo zanimljivih rezultata.