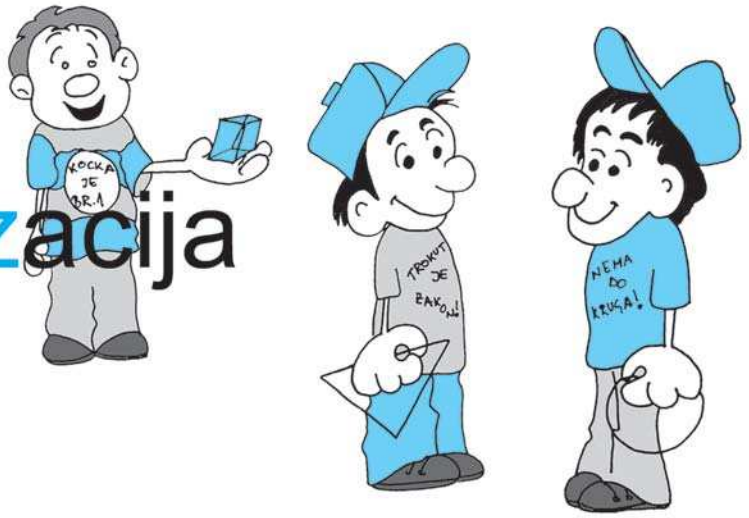
Iz rječnika metodike

Specijalizacija



Zdravko Kurnik, Zagreb

Specijalizacija je jedna od osnovnih znanstvenih metoda istraživanja. Njezina suprotnost je *generalizacija*.

O generalizaciji smo već pisali. Podsjetimo se.

Generalizacija ili **poopćavanje** je prijelaz s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegova nadskupa. Polazi se od nekog pojma kojemu je pridružen određeni skup objekata, njegov opseg, i ustanovljava neko svojstvo svih elemenata zadanog skupa. Zatim se promatra općenitiji pojam i svojstvo prenosi na sve elemente dobivenog nadskupa ili se izgrađuje općenitije svojstvo. Budući da odmah nije jasno hoće li pri tom prenošenju svojstvo ostati sačuvano, stoga se ono za sve elemente nadskupa nužno mora dokazati.

Sada specijalizaciju kao suprotnost možemo lako okarakterizirati.

Specijalizacija je prijelaz s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegova podskupa. Specijalizacija se najčešće primjenjuje kad je neko općenitije svojstvo, dobiveno generalizacijom već dokazano. Tada se specijalizacijom dobiva jednostavnije svojstvo za specijalan objekt. To svojstvo više ne treba dokazivati, jer je njegov dokaz obuhvaćen općim dokazom. Takvu specijalizaciju susrećemo u školskoj matematici. Kad se specijalizacija primjenjuje kao metoda istraživanja, situacija je, što će pokazati posljednji primjeri, nešto složenija.

Usporedimo li ove opise, možemo reći da je generalizacija metoda kojom se prelazi granica danog skupa objekata i izgrađuju općenitiji pojmovi i općenitije tvrdnje, a specijalizacija metoda kojom se učvršćuje unutarnja struktura danog skupa objekata.

Evo najčešćih prijelaza iz skupa u podskup u školskoj matematici:

$\mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, $\mathbf{Q}^+ \to \mathbf{N}$, $\mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Z}$, $\mathbf{R} \to \mathbf{Q}$, $\mathbf{C} \to \mathbf{R}$, *jednakokračni trokuti → jednakostranični trokuti, trokuti → pravokutni trokuti, pravokutnici → kvadrati, rombovi → kvadrati, paralelogrami → pravokutnici, trapezi → paralelogrami, četverokuti → trapezi, mnogokuti → trokuti, mnogokuti → četverokuti, mnogokuti → pravilni mnogokuti, kvadri → kocke, paralelepipedi → kvadri, n-terostrane piramide → tetraedri, trigonometrijske funkcije bilo kojega kuta → trigonometrijske funkcije oštroga kuta*.

Popis otkriva važnu činjenicu. Naime, prijelazi *mnogokuti* $\to$ *trokuti* i *n-terostrane piramide* $\to$ *tetraedri* mogu se okarakterizirati kao zamjene bilo kojega broja n brojem 3, a posljednji prijelaz u popisu zapravo je uvođenje ograničenja $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ za promatrani kut α. Na temelju tih prijelaza izdvajaju se dva osnovna načina specijalizacije:

1) zamjena varijable konstantom,
2) uvođenje ograničenja.

Već iz onog što je gore rečeno može se zaključiti da i specijalizacija ima široku primjenu u nastavi matematike. Pritom treba naglasiti da je njezina uloga u nastavnom procesu u odnosu na generalizaciju nešto povoljnija. Naime, generalizacija, odnosno prijelaz s konkretnog i pojedinačnog k općem, složen je misaoni proces. U psihologiji se posebno ukazuje na činjenicu da postoje učenici koji teško svladavaju taj prijelaz. S druge strane, prijelaz koji se vrši u specijalizaciji vodi do jednostavnijih matematičkih činjenica i omogućuje učenicima bolje razumijevanje nastavnih sadržaja.

* * *

Razmotrimo nekoliko karakterističnih specijalizacija u školskoj matematici.

Primjer 1. Talesov poučak.

Bilo koji obodni kut α nad nekom tetivom kružnice i pripadni središnji kut β povezuje jednakost $\beta = 2\alpha$. Najizrazitija **specijalizacija** ovog poučka o središnjem i obodnom kutu dobiva se kada za tetivu kružnice odaberemo promjer kružnice, tj. uzmemo da je središnji kut $\beta = 180^\circ$. Posljedica je Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice:

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.

Primjer 2. Visina jednakostraničnog trokuta.

Skup jednakostraničnih trokuta podskup je skupa jednakokračnih trokuta. To znači da se svaka činjenica koja vrijedi za jednakokračan trokut može **specijalizirati** za jednakostraničan trokut.

Ovdje promatramo onu visinu jednakokračnog trokuta koja je spuštena iz zajedničke krajnje točke krakova na osnovicu. Ako je a duljina osnovice i b duljina kraka, tada se primjenom Pitagorinog poučka za duljinu v te visine izvodi formula

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

U slučaju jednakostraničnog trokuta vrijedi $b = a$ i ta **specijalizacija** za duljinu v visine toga trokuta daje

$$v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

Metodička napomena. Ako se u nastavi najprije izvodi formula $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, formula $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ je, kao što znamo, njezina generalizacija i njezin jednostavan izvod nakon toga osigurava analogija.

Ako se najprije izvodi formula $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$, onda formulu $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ nije potrebno analogno izvoditi. Budući da je jednakostraničan trokut specijalna vrsta jednakokračnog trokuta, druga se formula dobiva iz prethodne opće formule zamjenom veličine b sa a. Dakle, primjenom specijalizacije.

Poželjno je da se u nastavi primjenjuju oba načina izvođenja. Na taj način učitelj matematike promjenom metoda rada pokazuje svoju *kreativnost*. On može iskoristiti tu promjenu da učenike još jednom poduči što su to generalizacija i specijalizacija.

Primjer 3. Dijagonala kvadrata.

Skup kvadrata podskup je skupa pravokutnika. Ta činjenica omogućuje sljedeći izvod. Ako su a i b duljine stranica pravokutnika, tada se primjenom Pitagorina poučka za duljinu d njegove dijagonale izvodi formula

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

U slučaju kvadrata vrijedi $b = a$ i ta **specijalizacija** za duljinu d njegove dijagonale daje

$$d = a\sqrt{2}.$$

Metodička napomena. Pogledajte napomenu u primjeru 2.

Primjer 4. Dijagonala kocke.

Skup kocaka podskup je skupa kvadara. Ta činjenica omogućuje sljedeći izvod. Ako su a, b i c duljine bridova kvadra, tada se primjenom Pitagorinog poučka za duljinu d njegove dijagonale izvodi formula

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

U slučaju kocke vrijedi $c = b = a$ i ta **specijalizacija** za duljinu d njezine dijagonale daje

$$d = a\sqrt{3}.$$

Metodička napomena. Pogledajte napomenu u primjeru 2.

Primjer 5. Površine specijalnih trokuta.

Ako su zadane duljine stranica trokuta a, b i c, njegova površina p izračunava se pomoću Heronove formule

$$p = \sqrt{s(s-1)(s-b)(s-c)},$$
$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Ova opća formula vrijedi za svaki trokut, pa mora vrijediti i za specijalne trokute. Dobro poznajemo tri specijalna trokuta: jednakostranični trokut, jednakokračni trokut i pravokutni trokut. Formule za površine tih trokuta znatno su jednostavnije od gornje formule. Do njih ćemo doći primjenom specijalizacije. Prije toga potrebno je malo preinačiti Heronovu formulu. Imamo redom

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)}{16}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}. \end{aligned}$$

Preinačen oblik Heronove formule posebno je pogodan u slučaju kada se duljine stranica trokuta izražavaju pomoću drugih korijena. Na primjer, ako je $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{7}$, tada se iz preinačene formule lako dobiva da je površina toga trokuta $p = \dfrac{\sqrt{59}}{4}$.

Pogledajmo sada specijalizacije.

1) Površina jednakostraničnog trokuta. U ovom je slučaju $c = b = a$. Ta **specijalizacija** za površinu p jednakostraničnog trokuta daje

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{4a^4 - a^4} = \frac{1}{4}\sqrt{3a^4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

2) Površina jednakokračnog trokuta. U slučaju da je a duljina osnovice, za duljine ostalih dviju stranica vrijedi $c = b$. Ta **specijalizacija** za površinu jednakokračnog trokuta daje

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - a^4} = \frac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2} \\ &= \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}. \end{aligned}$$

Uočavate li u ovoj formuli duljinu visine jednakokračnog trokuta iz zajedničke krajnje točke krakova na osnovicu?

3) Površina pravokutnog trokuta. U ovom slučaju vrijedi Pitagorin poučak $c^2 = a^2 + b^2$, pa ta **specijalizacija** uvrštena u preinačenu formulu za površinu pravokutnog trokuta odmah daje

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2} = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2}.$$

Metodička napomena. Jasno je da su učenici prije izvođenja Heronove formule naučili formule za površine specijalnih trokuta. Zato Heronovu formulu treba izvesti kao lijep primjer generalizacije, a nakon toga specijalizaciju iskoristiti za provjeru i učvršćivanje ranije stečenog znanja učenika.

Primjer 6. Potenciranje potencije.

Potenciranje je u uskoj vezi s množenjem. Da bismo dobili pravilo za potenciranje potencije, krenut ćemo od pravila za množenje potencija.

Najprije se izvodi osnovno pravilo za množenje dviju potencija iste baze: $a^m a^n = a^{m+n}$, analogijom se to pravilo proširuje na množenje triju potencija iste baze: $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$, a na kraju se pravilo generalizira: $a^{m_1} a^{m_2} \dots a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\dots+m_k}$.

Specijalizacija se u ovom slučaju sastoji u tome da se svi eksponenti izjednače: $m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$. Tada se iz općeg pravila dobiva $a^m a^m \dots a^m = a^{m+m+\dots+m} = a^{mk}$, odnosno novo pravilo, pravilo za potenciranje potencije:

$$(a^m)^k = a^{mk},$$

k-ta potencija m-te potencije jednaka je potenciji iste baze s umnoškom eksponenata mk kao eksponentom.

Primjer 7. Potenciranje korijena.

Učenici osmog razreda osnovne škole najprije upoznaju pravilo za množenje dvaju drugih korijena: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, analogijom se to pravilo proširuje na množenje triju drugih korijena: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{abc}$, a na kraju se pravilo generalizira: $\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_k} = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$. Obrnuti redoslijed izvođenja su **specijalizacije** ($k = 3$, $k = 2$).

Učenici prvog razreda srednje škole najprije upoznaju pravilo za množenje dvaju n-tih korijena: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, analogijom se to pravilo proširuje na množenje triju n-tih korijena: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$, a na kraju se pravilo na prirodan način generalizira: $\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$. Obrnuti redoslijed izvođenja su **specijalizacije** ($k = 3$, $k = 2$).

Povežimo sad ova dva niza izvođenja. U pravilima se pojavljuju dvije veličine: radikandi i eksponenti korijena.

Očito su posljednja tri pravila u odnosu na eksponente korijena generalizacije prvih triju pravila (eksponent 2 zamijenjen je varijablom n). S druge strane, prva tri pravila možemo shvatiti kao **specijalizacije** drugih triju pravila (varijabla n zamijenjena je konstantom 2).

Moguć je i drugi način specijalizacije; specijalizacija u odnosu na radikande. Pogledajmo treće i šesto pravilo. **Specijalizacija** $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$ daje dva nova pravila

$$(\sqrt{a})^k = \sqrt{a^k} \quad \text{(potenciranje drugog korijena)},$$

k-ta potencija drugog korijena iz a jednaka je drugom korijenu iz k-te potencije od a,

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} \quad \text{(potenciranje } n\text{-tog korijena)},$$

k-ta potencija n-tog korijena iz a jednaka je n-tom korijenu iz k-te potencije od a.

Metodička napomena. U ovom primjeru imali smo cijeli niz generalizacija i specijalizacija. Posebno je uočljivo da se ovdje na prirodan način povezuju određeni matematički sadržaji iz osnovnoškolske i srednjoškolske matematike. Mjesto je vrlo pogodno za razvoj mišljenja učenika.

Sljedeći primjer razmatra se slično primjeru 6. Zato čitatelju prepuštamo da uoči i sam misaono razradi sve navedene korake.

Primjer 8. Logaritmiranje potencije.

Osnovno pravilo (sinteza):

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Proširenje (analogija):

$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y = \log_a z.$$

Opće pravilo (generalizacija):

$$\log_a(x_1 x_2 \ldots x_k) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_k.$$

Specijalizacija: Za $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x$ dobiva se iz gornjeg općeg pravila $\log_a(xx\ldots x) = \log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x$, a odavde posebno, ali i novo pravilo

$$\log_a x^k = k \log_a x.$$

Logaritam k-te potencije jednak je umnošku eksponenta k i logaritma baze.

U nastavi matematike i u radu s naprednijim učenicima metoda specijalizacije može se koristiti i kao metoda istraživanja. Njezina primjena u nekim situacijama omogućuje dobivanje novih matematičkim istina. Cilj sljedećih dvaju primjera su upravo takva dva mala "otkrića": Heronova formula i formula za volumen krnjeg stošca ako su poznati polumjeri njegovih baza i duljina visine.

Primjer 9. Heronova formula.

Zadane su duljine stranica trokuta a, b i c. Pokažimo kako se primjenom metode specijalizacije može naslutiti oblik formule za površinu p trokuta izražene pomoću tih duljina.

1) Kao prvi specijalan trokut promatrat ćemo degenerirani trokut ABC. To je trokut kod kojeg su sva tri vrha na jednom pravcu. To i nije trokut u pravom smislu, ali se ponekad promatra za potrebe istraživanja. Moguće su tri degeneracije: $A \in BC$, $B \in AC$ i $C \in AB$, odnosno $a = b + c$, $b = a + c$ ili $c = a + b$.

Uočimo sljedeću vezu: ako je $b + c - a = 0$, $a + c - b = 0$ ili $a + b - c = 0$, tada je $p = 0$ i obrnuto. Ako i za takav "trokut" treba vrijediti formula, u njoj kao faktori trebaju biti izrazi $b + c - a$, $a + c - b$ i $a + b - c$. To znači da formula mora sadržavati umnožak

$$(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c).$$

Ovaj izraz ima dimenziju cm^3. Zato u formuli na lijevoj strani ne može biti samo p, već p^2 ili još veća potencija baze p. Pretpostavimo li da je p^2, onda gornji izraz na desnoj strani treba upotpuniti jednim linearnim trinomom $f(a, b, c)$, da bi obje strane imale dimenziju u cm^4. Prema tome, naslućujemo da tražena formula treba imati oblik

$$p^2 = f(a, b, c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c).$$

Prva **specijalizacija** ukazala nam je na velik dio oblika tražene formule. Nepoznat je ostao linearni trinom $f(a, b, c)$. Za njegovo određenje potrebna je još jedna specijalizacija.

2) Kao drugi specijalan trokut promatrat ćemo jednakostranični trokut ABC. Njegova površina je $p = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Druga **specijalizacija** $a = b = c$ pojednostavnjuje gornju jednakost tako da dobivamo

$$\frac{3a^4}{16} = a^3 f(a, a, a),$$

odnosno

$$f(a, a, a) = \frac{3a}{16}.$$

Na temelju ove jednakosti pretpostavljamo da bi linearni trinom $f(a, b, c)$ mogao imati oblik

$$f(a, b, c) = \frac{a + b + c}{16}.$$

Konačno za površinu p nalazimo formulu

$$p^2 = \frac{a + b + c}{16}(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c),$$

odnosno

$$p = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$
$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

To je poznata Heronova formula. Naravno, u ovom primjeru samo je naslućen njezin oblik. Iz samog izvoda ne možemo zaključiti vrijedi li formula ili ne. Znamo da vrijedi. Dokaz njezine valjanosti provodi se drugim sredstvima.

Primjer 10. Volumen krnjeg stošca.

Pokažimo kako se i ovdje primjenom specijalizacije može naslutiti tražena formula. Neka je dan krnji stožac s polumjerima osnovaka r_1, r_2 i duljinom visine v. Da bismo otkrili formulu za volumen toga krnjeg stošca, promatrat ćemo valjak i stožac s polumjerima osnovaka r_1 i istom duljinom visine kao dva specijalna slučaja krnjeg stošca.

Formule za volumene valjka i stošca poznajemo:

$$V = r_1^2 \pi v, \qquad V = \frac{1}{3} r_1^2 \pi v.$$

Analiziramo li pažljivo ove formule, lako uočavamo da se u objema pojavljuju veličine r_1^2, π i v. Opći oblik takve funkcije bio bi $ar_1^2\pi v$. Budući da krnji stožac ima dvije baze, polumjera r_1 i r_2, zaključujemo da bi se u traženoj formuli mogla pojaviti kvadratna funkcija dviju varijabli oblika $ar_1^2 + br_1r_2 + cr_2^2$. Pretpostavljamo, dakle, da je formula za volumen $V(r_1, r_2)$ krnjeg stošca oblika

$$V(r_1, r_2) = (ar_1^2 + br_1r_2 + cr_2^2)\pi v.$$

Potrebno je odrediti nepoznate koeficijente a, b i c. To sada nije teško. Odmah na početku možemo uočiti jedno jednostavno svojstvo funkcije V. Zamijenimo li uloge osnovaka krnjeg stošca, njegov se volumen neće promijeniti. To znači da funkcija V mora biti **simetrična**. Ta činjenica daje

$$V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1) \implies$$
$$(ar_1^2 + br_1r_2 + cr_2^2)\pi v = (ar_2^2 + br_2r_1 + cr_1^2)\pi v \implies$$
$$a = c.$$

Za potpuno određenje koeficijenata potrebne su nam još dvije specijalizacije.

Prva **specijalizacija**. Za valjak vrijedi $r_1 = r_2$. Iz toga slijedi

$$V(r_1, r_1) = (a + b + c)r_1^2\pi v = r_1^2\pi v,$$

pa je

$$(a + b + c) = 1.$$

Druga **specijalizacija**. Za stožac vrijedi $r_2 = 0$. Iz toga slijedi

$$V(r_1, 0) = ar_1^2\pi v = \frac{1}{3}r_1^2\pi v,$$

pa je

$$a = \frac{1}{3}.$$

Konačno nalazimo da je $a = b = c = \frac{1}{3}$, pa tražena formula poprima oblik

$$V(r_1, r_2) = \frac{1}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)\pi v.$$

Formula je primjenom simetričnosti i dviju specijalizacija otkrivena, ali time nije i dokazana. I dokaz ove formule provodi se drugim sredstvima.

Za mali samostalni rad nudimo vam posljednji primjer.

Primjer 11. Volumen krnje piramide.
Izvodi se na posve analogan način kao volumen krnjeg stošca. Možete li naslutiti traženu formulu?

* * *

U školskoj matematici postoje brojna mjesta u kojima se izvode generalizacije. One, uostalom, karakteriziraju matematiku. Budući da generalizacija nije uvijek jednostavan postupak, poželjno je da se u takvim slučajevima primjenjuju i specijalizacije. Na taj se način razmatranja svode na jednostavnije objekte i jednostavnije matematičke činjenice, koji su u većini slučajeva ranije obrađivani. Time se na prirodan način vrši ponavljanje i utvrđivanje gradiva. A to je već velika obrazovna korist.

Literatura

[1] Vesna Gorski, *Generalizacija i specijalizacija u nastavi matematike*, Diplomski rad, Zagreb 2000.
[2] Zdravko Kurnik, *Generalizacija*, Matematika i škola 4 (2000), 147–154.
[3] Zdravko Kurnik, *Kreativnost*, Zbornik radova 3. stručno-metodičkog skupa.
[4] Kristina Stanko, *Primjena znanstvenih metoda u nastavi matematike*, Diplomski rad, Zagreb 2004.