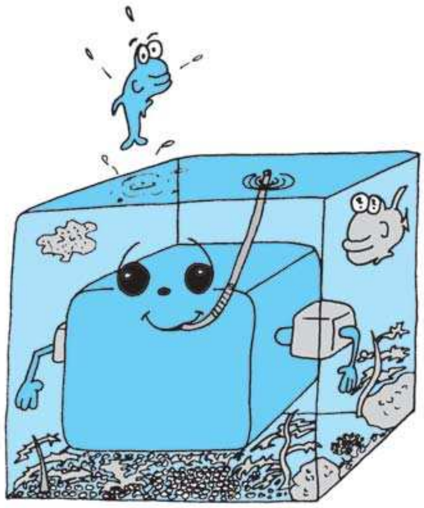
Zanimljiva matematika

Hiperkocka



Branimir Dakić, Zagreb

Prostor u kojem živimo doživljavamo kao prostor triju dimenzija, kao **trodimenzionalni Euklidski prostor**. Kažemo *doživljavamo* jer tako našu prirodnu okolinu percepiraju naša osjetila. Upravo na temeljima takve percepcije razvijen je apstraktni model trodimenzionalne geometrije koju danas izučavamo u školi, a koji u potpunosti korespondira s čovjekovim iskustvima i njegovim praktičnim potrebama.

A je li naše prirodno okruženje uistinu takvo? Postoje li i prostori s više dimenzija? Kako takvi prostori izgledaju, kako ih zamisliti? Kako ih zorno predočiti? Ta pitanja samo mogu zbuniti prosječnog stanovnika ove planete, a za njegov svakodnevni praktični život zapravo i nisu bitna.

Ali matematičarima su ona ipak zanimljiva i bitna, ona su dio njihovog profesionalnog interesa. I oni su na njih odavno dali svoje odgovore. Poopćenja na temelju analogije dovela su do izgradnje apstraktne teorije o n-dimenzionalnom prostoru, zasnovane i deduktivno izgrađene na sustavu aksioma. Unutar takve teorije malo je mjesta dvojbama, a i ne traže se opravdanja u empirijskom iskustvu.

Nerijetko se nastavnici u školi susreću s pitanjima svojih učenika o četvrtoj dimenziji. Dakako, kao i u raznim drugim okolnostima, na pitanje bi valjalo odgovoriti, nikako ga ne treba ignorirati. Ali kako odgovoriti? Kako zadovoljiti radoznalost učenika? Pokušajmo prikazati jedno od mogućih rješenja.

Za početak učinit ćemo to na popularnom primjeru jednog jednostavnog geometrijskog oblika, kocke. Na njemu ćemo pokazati kako možemo razvijati matematičke ideje o prostoru sa četiri dimenzije. Pritom ćemo se poslužiti metodom koordinata. Ta je metoda, naime, najprikladnija jer je bliska srednjoškolcima i jer jasno slijedi zamisao poopćenja na temelju analogije.

Uvođenjem brojevnog pravca provedeno je obostrano jednoznačno pridruživanje točaka pravca i realnih brojeva.

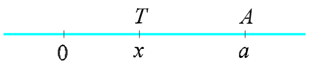
Koordinatna ravnina pak omogućuje identifikaciju točaka ravnine i uređenih parova realnih brojeva.

U prostoru triju dimenzija koordinatnim sustavom uspostavljena je bijekcija točaka prostora i uređenih trojki realnih brojeva.

Analogno, u prostoru sa četiri dimenzije svakoj točki odgovara jedinstvena uređena četvorka realnih brojeva, i obrnuto, svakoj četvorci realnih brojeva pridružena je jedinstvena točka. Otklonimo za sada pitanje kako zorno predočiti takve točke.

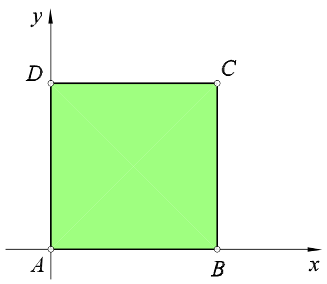
A četverodimenzionalna kocka! Što je to? Pa to je barem jednostavno, reći će matematičar. To je podskup točaka četverodimenzionalnog prostora...

Ali, krenimo postupno, od dužine, podskupa točaka jednodimenzionalnog prostora – pravca. Dužina duljine a na brojevnoj crti je skup točaka $T(x)$, koji je određen sustavom nejednakosti $0 \leq x \leq a$.



Kvadrat sa stranicom duljine a je podskup točaka $T(x, y)$ ravnine čije koordinate zadovoljavaju sustav uvjeta: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$.

Kvadrat ima četiri vrha, to su točke $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, a)$ i $D(0, a)$. Ta četiri uređena para konstruirana su od dvaju elemenata, 0 i a.



Kvadrat ima četiri stranice. I njih možemo jednostavno prebrojiti. Pritom možemo razmišljati i ovako:

Točkama iste stranice jedna je od dviju koordinata, x ili y, konstantna, iznosi 0 ili a, a druga varira unutar intervala $[0, a]$.

Evo kako to izgleda prema našoj slici:

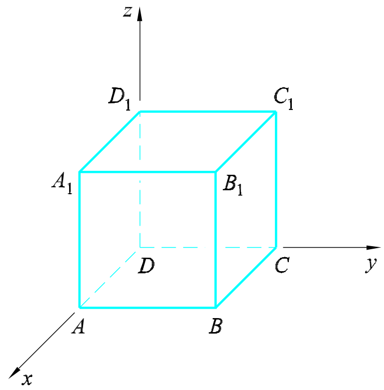
$$
\begin{array}{ll}
\overline{AB} & \ldots\ 0 \leq x \leq a,\ y = 0, \\
\overline{BC} & \ldots\ x = 1,\ 0 \leq y \leq a, \\
\overline{CD} & \ldots\ 0 \leq x \leq a,\ y = 1, \\
\overline{AD} & \ldots\ x = 0,\ \ 0 \leq y \leq a.
\end{array}
$$

Površina ovog kvadrata jednaka je $P = a^2$.

Kocka je podskup točaka $T(x, y, z)$ trodimenzionalnog prostora čije koordinate ispunjavaju sustav uvjeta:

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a.$$

Kocka ima osam vrhova. Svaki je od tih vrhova određen uređenom trojkom čiji su elementi 0 ili a. Broj tih trojki (ujedno i broj vrhova) jednak je broju varijacija s ponavljanjem trećeg razreda od dvaju elemenata: $2^3 = 8$.



Lako je vidjeti da kocka ima 12 bridova. Dvije koordinate svake točke na pojedinom bridu kocke su fiksne, a treća varira unutar intervala $[0, a]$. Tako imamo:

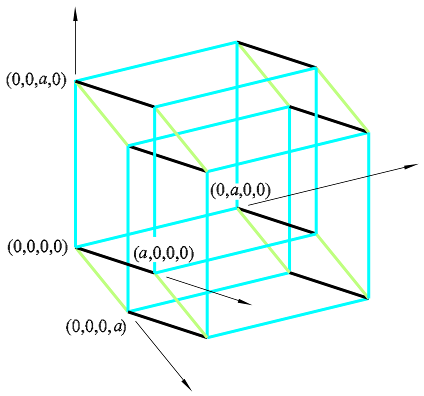
$$
\begin{array}{ll}
\overline{AA_1} & \ldots\ x = a,\ y = 0,\ 0 \leq z \leq a; \\
\overline{BB_1} & \ldots\ x = a,\ y = a,\ 0 \leq z \leq a; \\
\overline{CC_1} & \ldots\ x = 0,\ y = a,\ 0 \leq z \leq a; \\
\overline{DD_1} & \ldots\ x = 0,\ y = 0,\ 0 \leq z \leq a.
\end{array}
$$

Cikličkim zamjenama dobili bismo još osam bridova.

Znamo da kocka ima 6 strana. Točkama pojedine strane dvije su koordinate fiksne, a treća varira.

$$
\begin{array}{ll}
ABCD & \ldots\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ z = 0; \\
A_1B_1C_1D_1 & \ldots\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ z = a; \\
DCC_1D_1 & \ldots\ x = 0,\ 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq z \leq a; \\
ABB_1A_1 & \ldots\ x = a,\ 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq z \leq a; \\
ADD_1A_1 & \ldots\ 0 \leq x \leq a,\ y = 0,\ 0 \leq z \leq a; \\
BCC_1B_1 & \ldots\ 0 \leq x \leq a,\ y = a,\ 0 \leq z \leq a.
\end{array}
$$

Četverodimenzionalna kocka ili **hiperkocka**, s bridom duljine a je podskup točaka (x, y, z, w) četverodimenzionalnog prostora pri čemu je $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, $0 \leq t \leq a$.



Koliko vrhova, koliko bridova, koliko dvodimenzionalnih, a koliko trodimenzionalnih strana ima hiperkocka?

Prebrojimo:

vrhova je onoliko koliko ima uređenih četvorki što se mogu konstruirati iz dvaju elemenata, 0 i a. Dakle ima ih $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Kod svakog brida hiperkocke tri su koordinate fiksne, četvrta varira između 0 i a. Tako ćemo nabrojiti 32 brida.

Točkama pojedinog brida fiksne su tri koordinate, a četvrta varira. Uzmimo da varira koordinata x. Tada imamo sljedećih osam tipova točaka:

$$(x,0,0,0),\ (x,0,0,a),\ (x,0,a,0),\ (x,a,0,0),$$
$$(x,0,a,a),\ (x,a,0,a),\ (x,a,a,0),\ (x,a,a,a).$$

Isto toliko uređenih parova dobijemo i uz zamjenu koordinate x koordinatama y, z, odnosno t.

Prebrojimo sada dvodimenzionalne strane.

Na tim stranama pojedinim točkama fiksne su dvije koordinate, a dvije variraju. Koliko je takvih uređenih četvorki, toliko je i strana:

$$(x,y,0,0),\ (x,y,0,a),\ (x,y,a,0),\ (x,y,a,a),$$
$$(x,0,z,0),\ (x,0,z,a),\ (x,a,z,0),\ (x,a,z,a),$$
$$(x,0,0,t),\ (x,0,a,t),\ (x,a,0,t),\ (x,a,a,t),$$
$$(0,y,z,0),\ (0,y,z,a),\ (a,y,z,0),\ (a,y,z,a),$$
$$(0,y,0,t),\ (0,y,a,t),\ (a,y,0,t),\ (a,y,a,t),$$
$$(0,0,z,t),\ (0,a,z,t),\ (a,0,z,t),\ (a,a,z,t).$$

Vidimo da hiperkocka ima ukupno 24 dvodimenzionalne strane.

Hiperkocka je omeđena trodimenzionalnim stranama, (trodimenzionalnim) kockama. Koliko je tih hiperstrana? Prebrojimo ih! Točke pojedine hiperstrane dobijemo tako da fiksiramo jednu njihovu koordinatu, a tri preostale variramo:

$$(x,y,z,0),\ (x,y,z,a),\ (x,y,0,t),\ (x,y,a,t),$$
$$(x,0,z,t),\ (x,a,z,t),\ (0,y,z,t),\ (a,y,z,t).$$

Hiperkocka, dakle, ima osam trodimenzionalnih strana.

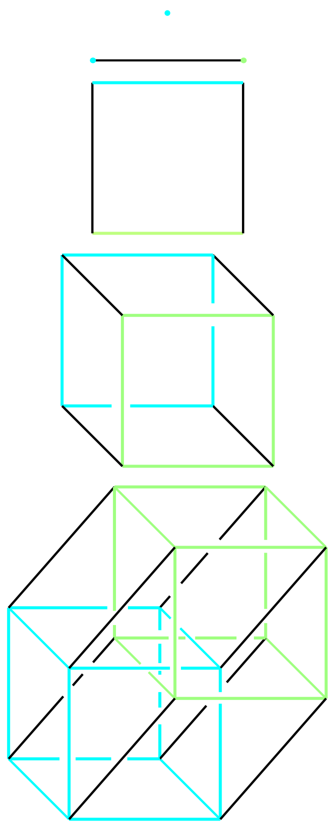
Jesmo li ovim odgovorili na pitanja postavljena na početku članka? Nismo sigurni. Naime, matematičari će vjerojatno biti zadovoljni. Ali samo oni! Ostali će zasigurno i dalje postavljati pitanja kao: “Kako si mogu zorno predočiti hiperkocku? Kako je nacrtati?”

Zaobiđimo i opet ovo pitanje i pokušajmo razmišljati na ovaj način:

translacijom za vektor $\vec{a}$ točka A “opiše” dužinu $\overline{AB}$ duljine a.

Ako dužinu $\overline{AB}$ translatiramo za vektor duljine a okomit na AB, kao trag dobit ćemo kvadrat stranice a.

Ako sada taj kvadrat translatiramo za vektor duljine a okomit na ravninu kvadrata, kvadrat će *opisati* kocku. A ako tu kocku translatiramo za vektor duljine a okomit na prostor kocke, dobit ćemo “hiperkocku”.



Prevara? Nikako! Savršeno logički u redu. Drugi je problem što to zapravo znači *vektor duljine a okomit na prostor kocke*.

Sve naše geometrijske crteže izvodimo na papiru, na ploči, na zaslonu računala, dakle u ravnini. Tako i slike geometrijskih tijela prikazujemo njihovim projekcijama (ortogonalnim, kosim, centralnim,...). Zato pomišljamo ne bismo li barem mogli hiperkocku prikazati njezinom projekcijom na ravninu.

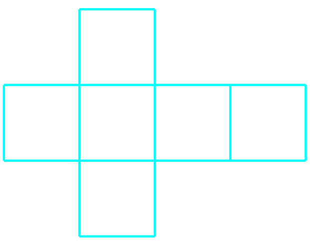
Kada dužinu postavimo okomito na ravninu, njezina ortogonalna projekcija na tu ravninu bit će točka. Ako pak kvadrat postavimo okomito na ravninu, njegova će ortogonalna projekcija biti dužina. Ako kocku postavimo tako da jedna njezina strana bude paralelna ravnini projekcije, projekcija će biti kvadrat. A što je onda četvrta slika u nizu? Nije li to projekcija hiperkocke na ravninu?

Ili, kako je kvadrat projekcija kocke na ravninu (prostor niže dimenzije), onda je kocka projekcija hiperkocke na trodimenzionalni prostor (prostor niže dimenzije).

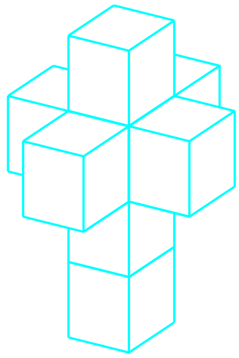
I na kraju, pozabavimo se malo i "mrežom" hiperkocke.

Krenimo od kvadrata s duljinom stranice a. Ako zamislimo da su njegove stranice tanke niti i načinimo rez u točki A, tada možemo razmotati stranice kvadrata tako da pripadaju jednom pravcu. *Mreža* kvadrata je dužina duljine $4a$.

Zamislimo da je kocka šuplja i da su njezine strane od tankog papira. Razrežimo kocku duž njezinih bridova, kao na slici, te razgrnemo njezine strane u ravninu. Dobit ćemo poznatu nam mrežu kocke.



I sada, "razrežemo" li (ma što to značilo!) hiperkocku i razgrnemo njezine trodimenzionalne strane u trodimenzionalni prostor, dobit ćemo mrežu hiperkocke.



Sličnim razmatranjima može se izvesti zaključak da postoji ukupno šest pravilnih hiperpoliedara. Iz sljedeće tablice za svaki pojedini od njih vidimo koliki je broj vrhova (F_0), koliki je broj bridova (F_1), koliki je broj strana (F_2) i koliki je broj trodimenzionalnih strana (F_3). U posljednjem stupcu navedena je vrsta trodimenzionalnih strana (pravilnih trodimenzionalnih poliedara) kojima je pojedini hiperpoliedar omeđen.

F_0	F_1	F_2	F_3	3-dim. strane
5	10	10	5	tetraedar
16	32	24	8	kocka
8	24	32	16	tetraedar
24	96	96	24	oktaedar
600	1200	720	120	dodekaedar
120	720	1200	600	tetraedar

Jesmo li se barem malo približili rješenju enigme zvane *Četverodimenzionalni prostor*? Vjerujem da jesmo.

U izvatku dijela priče akademika Vladimira Devidéa o četverodimenzionalnom prostoru možda ćete naći još i malo zora.

I na kraju navedimo još i nekoliko vrlo popularnih knjiga koje bi mogle biti zanimljive svakome tko želi pročitati još ponešto o ovoj zanimljivoj temi.

Literatura

[1] Thomas F. Banchoff, *Beyond the Third Dimension*, Scientific American Library, New York, 1996.

[2] Branimir Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] Keith Davlin, *Mathematics*, The Science of Patterns, Scientific American Library, New York, 1994.

[4] Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton & Company, New York–London, 2001.

[5] Rudy Rucker, *The Fourth Dimension*, Houghton Mifflin Comp., Boston, 1984.