Školsko natjecanje u matematici

Prva gimnazija u Zagrebu, veljača 2005. g.

Branimir Dakić, Zagreb

I. razred

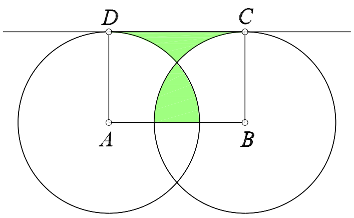
Zadatak 1. Koji je broj veći: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$ ili $100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$?

Zadatak 2. Odredi najmanji prirodni broj n takav da broj $2^n \cdot 5^{12}$ ima 15 znamenki.

Zadatak 3. Tekućina zauzima $3/4$ obujma posude i ima masu 3 kg. Masa same tekućine za $3/4$ kg je veća nego masa prazne posude. Ako je posuda puna kolika je ukupna masa?

Zadatak 4. Ako je $2x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 2y + 1 = 0$, koliko je $x + y + z$?

Zadatak 5. Polumjeri dviju kružnica su jednaki, a udaljenost njihovih središta A i B iznosi 10 cm. Ako su površine dvaju iscrtanih dijelova ravnine jednake, kolika je površina pravokutnika $ABCD$?



II. razred

Zadatak 1. Izračunaj: $S_n = 1 + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots + 2005i^{2005}$.

Zadatak 2. Neka je $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} = ad - bc$.

Riješi u skupu $\mathbf{R}$ jednadžbu: $\begin{array}{|c|c|}\hline x+1 & x-1 \\ \hline x-2 & 2x-3 \\ \hline \end{array} = |x-1|$.

Zadatak 3. Odredi realne brojeve m i n takve da funkcija $f(x) = x^2 + mx + nx + m - n$ prima negativne vrijednosti ako i samo ako je $x \in \langle -4, 2 \rangle$.

Zadatak 4. Osnovice jednakokračnog trapeza duge su 10 cm i 20 cm, a duljina dijagonale je 25 cm. Odredi kutove ovog trapeza.

Zadatak 5. Točka D je nožište visine spuštene iz vrha A na krak $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC. Ako je $|AC| + |CD| = 2(|AB| + |BD|)$, koliki su kutovi tog trokuta.

III. razred

Zadatak 1. Izračunaj: $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$.

Zadatak 2. Pokaži da su funkcije $f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$ i $g(x) = \cos 2x$ jednake.

Zadatak 3. Dokaži da je obujam tijela koje nastaje rotacijom trokuta $\triangle ABC$ oko stranice a jednak $V = \frac{4P^2}{3a}\pi$, gdje je P površina trokuta.

Zadatak 4. Koliko rješenja ima jednadžba: $\log_2 |x| = 2\sin|\pi x|$?

Zadatak 5. Za stranice trokuta vrijedi jednakost $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c}{a-b}$. Koliki je kut α ovog trokuta?

IV. razred

Zadatak 1. Dokaži identitet: $\left(\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1 + i\operatorname{tg} n\alpha}{1 - i\operatorname{tg} n\alpha}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Zadatak 2. Koliko racionalnih članova ima u raspisu potencije $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{18}$?

Zadatak 3. Zadan je niz (a_n), $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$. Odredi $a_{2\,005}$.

Zadatak 4. Prikaži u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini skup svih točaka $T(x, y)$ za čije koordinate vrijedi $x^2 + y^2 - 2 \leq 2|x - y|$.

Zadatak 5. Neka je $f(x) = 2^{kx} + 9$, $k \in \mathbf{R}$. Ako je $f(3) : f(6) = 1 : 3$, izračunaj $f(9) - f(3)$.

Rješenja zadataka

I. razred

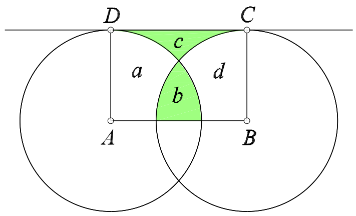
1. Ti su brojevi jednaki!?

2. $2^{19} \cdot 5^{12} = 2^7 \cdot 10^{12} = 128 \cdot 10^{12}$.

3. 2.5 kg.

4. $(x-2y)^2 + (y+1)^2 + (x+z)^2 = 0$, odatle $x = 2y$, $y = -1$, $z = -x$.

5. Sa slike vidimo: $P = a + b + c + d$.



No, $b = c$ pa je $P = a + b + c + d = (a+b) + (b+d) = \frac{1}{2}r^2\pi = 50\pi\,\mathrm{cm}^2$.

II. razred

1. Svi članovi ove sume koji sadrže parne potencije imaginarne jedinice činit će realni dio kompleksnog broja, zbroja S_n. Ostali će pribrojnici biti imaginarni brojevi i njihov zbroj dat će imaginarni dio rezultata.

Imamo dakle:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(S_n) &= 2i^2 + 4i^4 + 6i^6 + \ldots + 2004i^{2004} = \\ &-2 + 4 - 6 + 8 - \ldots - 2002 + 2004 \\ &= 2(-1 + 2 - 3 + 4 - \ldots - 1001 + 1002) \\ &= 2 \cdot 501 = 1002.\end{aligned}$$

I dalje,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(S_n) &= i + 3i^3 + 5i^5 + \ldots + 2003i^{2003} \\ &+ 2005i^{2005} = (1 - 3 + 5 - 7 + \ldots \\ &- 2003 + 2005)i = 1003i.\end{aligned}$$

Dakle je $S_n = 1002 + 1003i$.

2. Prema opisanoj oznaci imamo jednadžbu $(x+1)(2x-3) - (x-1)(x-2) = |x-1|$. Nakon sređivanja dobije se $x^2 + 2x - 5 = |x+1|$.

(1) Za $x \leq -1$ imamo jednadžbu $x^2 + 3x - 4 = 0$ s rješenjima $x = -4$ i $x = 1$. Zbog uvjeta $x \leq -1$ odbacujemo drugo od ta dva broja.

(2) Za $x \geq -1$ imamo jednadžbu $x^2 + x - 6 = 0$ s rješenjima $x = -3$ i $x = 2$. Zbog uvjeta $x \geq -1$ odbacujemo $x = -3$.

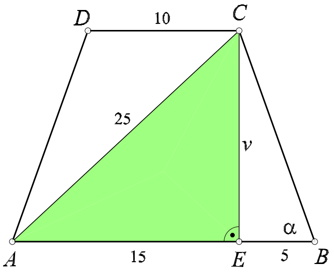
Rješenja zadane jednadžbe su $x_1 = -4$ i $x_2 = 2$.

3. Brojevi -4 i 2 moraju biti nultočke funkcije f. Iz tog uvjeta dobije se sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} 3m + 5n = 16, \\ 3m + n = -4. \end{cases}$$

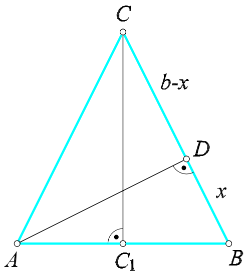
Odatle dobijemo $m = -3$, $n = 5$ te je $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

4. Iz iscrtanog pravokutnog trokuta nalazimo $v = 20$ cm.



Zatim je $\mathrm{tg}\,\alpha = 4$ te je $\alpha = 75°57'50''$.
I konačno, $\beta = 104°2'10''$.

5. Uvedimo oznake kao na slici.



Možemo zapisati:

$$2b - x = 2(a + x).$$

Iz $\triangle ABD \sim \triangle BCC_1$ slijedi

$$x : a = a : 2b.$$

Kad odatle uvrstimo x u prethodnu jednakost, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu $4b^2 - 4ab - 3a^2 = 0$ s rješenjem $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

No, $\cos\beta = \frac{a}{2b} = \frac{1}{3}$, te je $\beta = 70°31'44''$, $\alpha = 38°56'36''$.

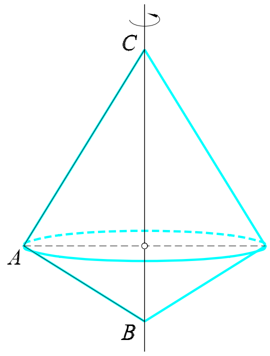
III. razred

1. $\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} =$
$\left(\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}\right) + \left(\sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8}\right) =$
$\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{\pi}{8} +$
$\left(\sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right)^2 - 2\sin^2\frac{3\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{8} =$

$2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{4}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{8} =$
$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

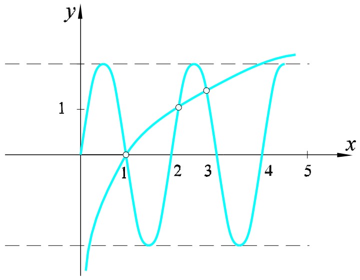
2. $f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = \sqrt{\sin^4 x + 4(1-\sin^2 x)} - \sqrt{\cos^4 x + 4(1-\cos^2 x)} = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} - \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} = |\sin^2 x - 2| - |\cos^2 x - 2| = -\sin^2 x + 2 - \cos^2 x - 2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

3. Volumen rotacijskog tijela je jednak $V = \frac{1}{3}av^2\pi$.



Iz $P = \frac{a\cdot v}{2}$ je $v = \frac{2P}{a}$ pa nakon uvrštavanja dobijemo $V = \frac{4P^2}{3a}\pi$.

4. Nacrtajmo na jednoj slici grafove funkcija $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = 2\sin|\pi x|$ te pogledajmo u koliko se točaka one sijeku. Broj sjecišta jednak je broju rješenja zadane jednadžbe.



No obje funkcije su parne, grafovi su im simetrični, pa ih je dovoljno nacrtati u poluravnini desno od osi y i broj sjecišta pomnožiti s 2.

Jednadžba ima 6 rješenja.

5. Iz $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c}{a-b}$ slijedi $a^2 = b^2 + c^2 + b\cdot c$, a odatle $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

Dakle je $\alpha = 120°$.

IV. razred

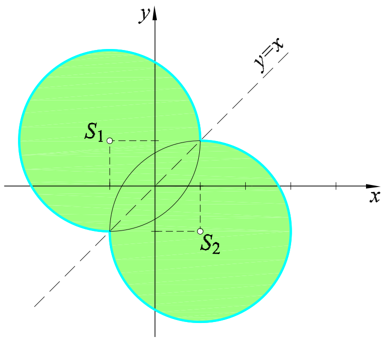
1. Zamjenimo $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ te imamo: $\left(\frac{1 + i\operatorname{tg} x}{1 - i\operatorname{tg} x}\right)^n = \frac{(\cos x + i\sin x)^n}{\cos x - i\sin x)^n} = \frac{\cos nx + i\sin nx}{\cos nx - i\sin nx} = \frac{1 + i\operatorname{tg} nx}{1 - i\operatorname{tg} nx}$.

3. Eksponenti obiju potencija u umnošku $3^{6-r/3}\cdot 2^{r/2}$ moraju biti cijeli brojevi. A to će bit u četiri slučaja: $r \in \{0, 6, 12, 18\}$.

4. Ispisujemo li redom članove niza, dobit ćemo: $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = 4$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{8}$, $a_6 = \frac{1}{4}$, $a_7 = 2$, $a_8 = 8$, $a_9 = 4, \ldots$

Skupina od šest uzastopnih članova niza uzastopce se ponavlja. Kako je $2005 = 335\cdot 6 - 5$, zaključujemo da je $a_{2005} = 2$.

5. (1) Ako je $y \le x$, imamo nejednadžbu
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \le 4.$$
(2) Ako je $y \ge x$, imamo nejednadžbu
$$(x+1)^2 + (y-1)^2 \le 4.$$



Na slici je iscrtan dio ravnine u kojem se nalaze sve točke čije koordinate x i y zadovoljavaju zadanu nejednadžbu.

5. Iz danog podatka slijedi $2^{6k} - 3\cdot 2^{3k} - 18 = 0$, te je $2^{3x} = 6$. Zatim je $f(9) - f(3) = 2^{9k} + 9 - 2^{3k} - 9 = 6^3 - 6 = 6\cdot 35 = 210$.

* * *

Ništa nismo postigli ako je bar nešto ostalo nedorađeno.

(C. F. Gauss)