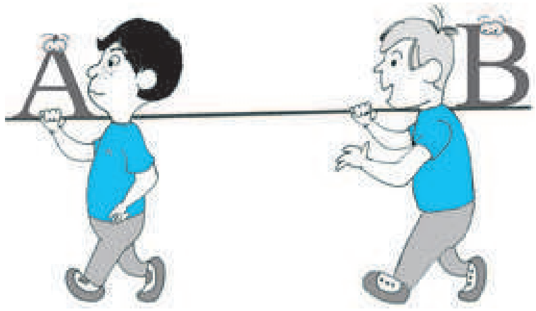


Osnovne konstrukcije i osnovna primjena

Zdravko Kurnik, Zagreb

U konstruktivnoj geometriji razlikujemo dvije vrste konstrukcija: osnovne konstrukcije i složene konstrukcije. Konstruktivni zadaci u pravilu su složene konstrukcije za koje je potrebno više geometrijskih činjenica i koje se u procesu analize razlažu na niz jednostavnih konstrukcija koje se lako izvode.

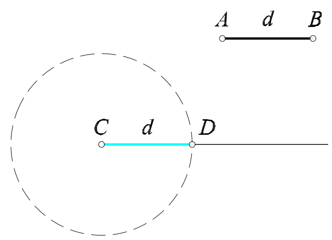
Skupina jednostavnih konstrukcija na koje se svode složenije konstrukcije naziva se **osnovne konstrukcije**. One se u nastavi geometrije u osnovnoj školi uvode postupno. Sada je jasno što znači riješiti konstruktivni zadatak; to znači svesti taj zadatak na konačan broj osnovnih konstrukcija ili već riješenih zadataka.

Da bi obrada osnovnih konstrukcija bila metodički primjerena, potrebno je da se pri opisu svake od njih navede i neki osnovni matematički sadržaj gdje se one primjenjuju. Na taj se način geometrijsko gradivo čvršće povezuje, a učenici neposredno uviđaju potrebu uvođenja tih konstrukcija. U ovom prikazu osnovni matematički sadržaj su **četiri osobite točke trokuta**.

Skupina osnovnih konstrukcija nije strogo određena, već se može po potrebi dopunjavati. Postoje ipak neke koje se ne mogu zaobići. U ovom prikazu ta skupina sadrži 11 osnovnih konstrukcija. I među njima ima "jednostavnijih" i "složenijih".

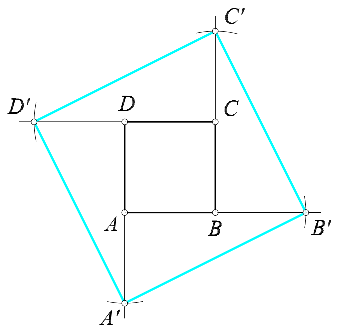
1. Prenošenje dužine

Ako na polupravcu odabranog smjera s početnom točkom C treba konstruirati dužinu zadane duljine d, onda je za to dovoljno opisati kružnicu $k(C, d)$. Sjecište D te kružnice i polupravca je druga krajnja točka dužine $\overline{CD}$ koja ima duljinu d.



Ovo je najčešća osnovna konstrukcija. Primjenjuje se već u gotovo svim sljedećim osnovnim konstrukcijama. Pogledajmo malo složeniji primjer.

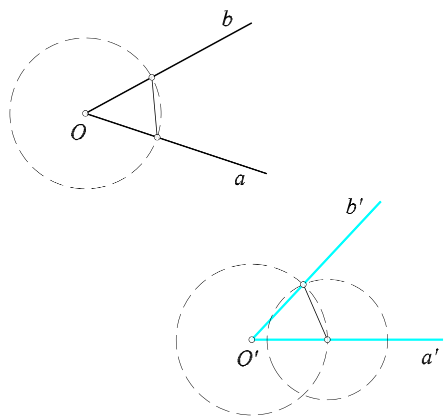
Primjer 1. Zadan je kvadrat $ABCD$. Produžimo njegove stranice $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ za duljine stranica do točaka A', B', C', D'. Kakav smo četverokut dobili? Kolika je površina tog četverokuta u odnosu na površinu zadanog kvadrata?



Tvrdnja: *Četverokut $A'B'C'D'$ je kvadrat. Površina četverokuta $A'B'C'D'$ je 5 puta veća od površine kvadrata $ABCD$.*

2. Prenošenje kuta

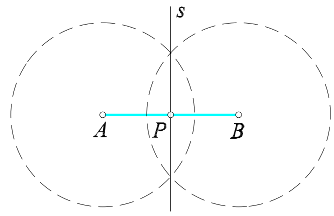
Zadani kut $\sphericalangle aOb$ prenosimo tako da tetivu koju odsijecaju krakovi a i b kuta na nekoj kružnici oko vrha O prenesemo na sukladnu kružnicu oko početne točke O' odabranog prvog kraka a' traženog kuta $\sphericalangle a'O'b'$.



Ova se konstrukcija najčešće primjenjuje u trima od četiriju osnovnih konstrukcija trokuta.

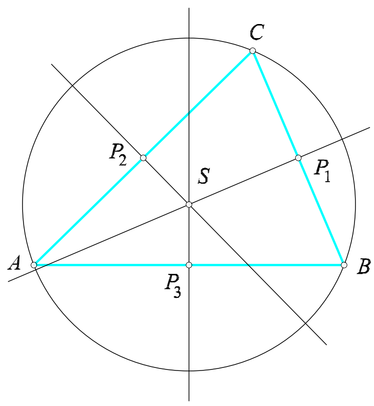
3. Konstrukcija simetrale dužine i polovišta dužine

Simetrala s zadane dužine $\overline{AB}$ je spojnica sjecišta dviju kružnica jednakih polumjera oko krajeva dužine A i B, u našem slučaju kružnica $k(A, |AB|)$ i $k(B, |AB|)$. Polovište P dužine $\overline{AB}$ je sjecište te dužine i njezine simetrale s.



Važnu primjenu konstrukcije simetrale dužine opisuje sljedeći primjer.

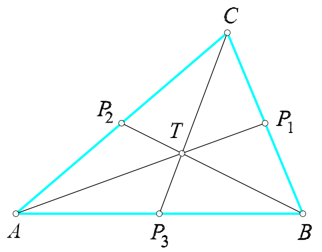
Primjer 2. Simetrale stranica trokuta i trokutu opisana kružnica.



Tvrdnja: *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki S. Ta točka je središte trokutu opisane kružnice.*

Važnu primjenu konstrukcije polovišta dužine nalazimo u sljedećem primjeru.

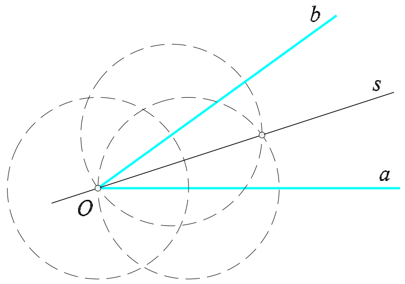
Primjer 3. Težišnice i težište trokuta.
Dužina kojoj su krajevi vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice naziva se težišnica trokuta. Na crtežu su sva tri polovišta, P_1, P_2, P_3 stranica trokuta ABC i sve tri težišnice, $\overline{AP_1}$, $\overline{BP_2}$, $\overline{CP_3}$.



Tvrdnja: *Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki T. Ta točka naziva se težište trokuta. Težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru* 2 : 1.

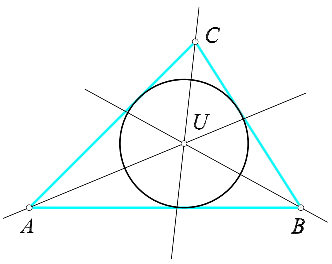
4. Konstrukcija simetrale kuta

Najprije oko vrha O zadanog kuta $\sphericalangle aOb$ po volji opišemo neku kružnicu. Zatim oko sjecišta te kružnice i krakova kuta a i b opišemo kružnice jednakih polumjera, recimo one kroz točku O. Drugo sjecište tih kružnica je druga točka simetrale s kuta $\sphericalangle aOb$.



Važnu primjenu konstrukcije simetrale kuta opisuje sljedeći primjer.

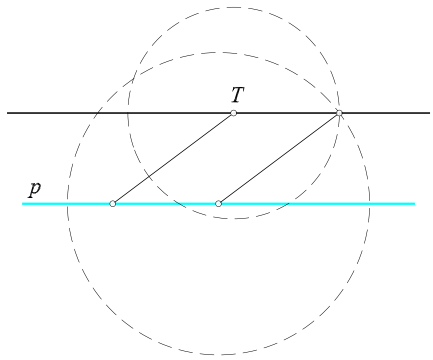
Primjer 4. Simetrale kutova trokuta i kružnica upisana trokutu.



Tvrdnja: *Simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki U. Ta je točka središte trokutu upisane kružnice.*

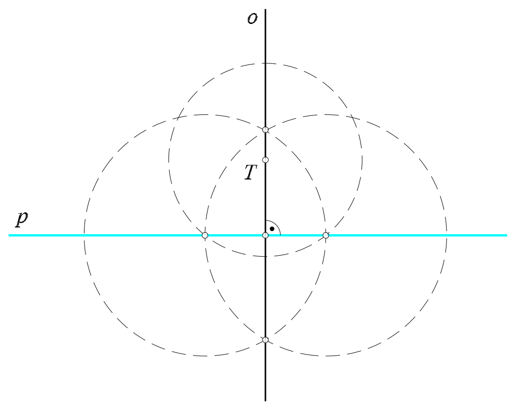
5. Konstrukcija paralele s pravcem kroz točku

Konstrukcija se zasniva na svojstvu paralelograma. Na pravcu p odaberu se bilo koje dvije točke. Četvrti vrh paralelograma kojemu su te dvije točke i točka T tri vrha druga je točka tražene paralele.



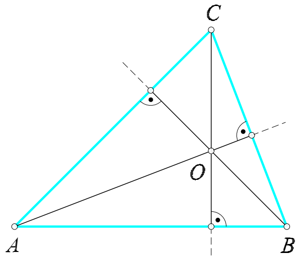
6. Konstrukcija okomice iz točke na pravac

Najprije oko zadane točke T opišemo po volji neku kružnicu koja siječe zadani pravac p. Zatim oko sjecišta te kružnice i pravca p opišemo kružnice jednakih polumjera koje se presijecaju. Spojnica sjecišta tih kružnica je tražena okomica o iz točke T na pravac p.



Ovu konstrukciju možemo iskoristiti za uvođenje još jedne osobite točke trokuta.

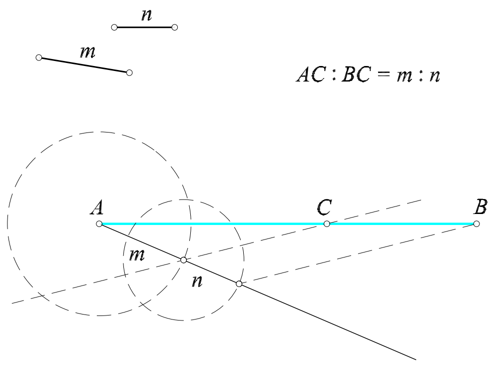
Primjer 5. Visine trokuta i ortocentar.



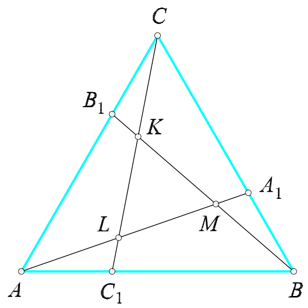
Tvrdnja: *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki O. Ta se točka naziva ortocentar trokuta.*

7. Dijeljenje dužine u zadanom omjeru

Neka zadanu dužinu $\overline{AB}$ treba podijeliti u omjeru $m : n$. Za konstrukciju djelišne točke C primjenjuje se dvaput konstrukcija prenošenja dužine i jednom konstrukcija povlačenja paralele s danim pravcem kroz danu točku.



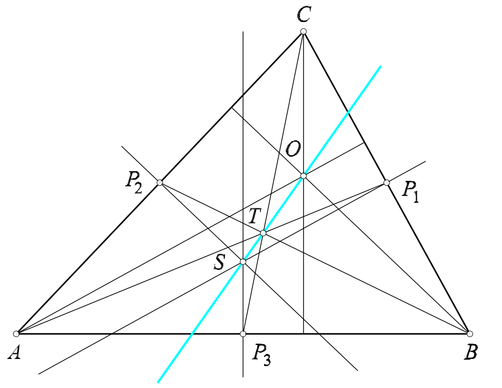
Primjer 6. Točke A_1, B_1, C_1 dijele stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC u omjeru $1 : 2$. Dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ određuju trokut KLM. Je li trokut KLM također jednakostraničan? U kojem su odnosu površina trokuta KLM i površina trokuta ABC?



Tvrdnja: *Trokut KLM je također jednakostraničan. Površina trokuta KLM i površina trokuta ABC odnose se kao* $1 : 7$.

Povežimo sada rezultate iz primjera 2, 3 i 5. Dobivamo jedno zanimljivo svojstvo triju osobitih točaka trokuta.

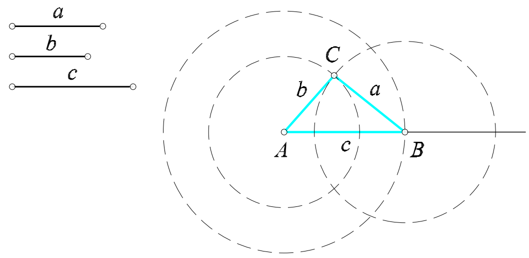
Primjer 7. Eulerov pravac.



Tvrdnja: *Središte S trokutu opisane kružnice, težište T i ortocentar O leže na jednom pravcu. Taj se pravac naziva Eulerov pravac. Pritom točka T dijeli dužinu* $\overline{SO}$ *u omjeru* $1 : 2$.

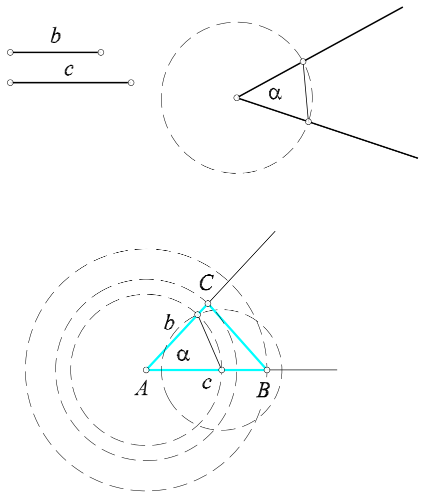
8. Konstrukcija trokuta S–S–S

Konstrukcija je jasna.



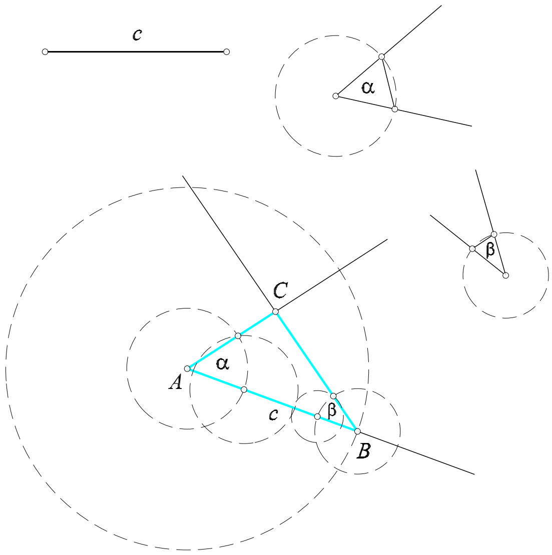
9. Konstrukcija trokuta S–K–S

U ovoj konstrukciji primjenjuje se dvaput konstrukcija prenošenja dužine i jednom konstrukcija prenošenja kuta.



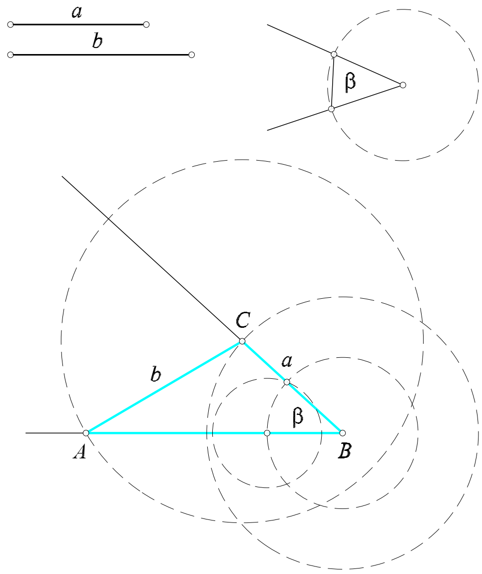
10. Konstrukcija trokuta S–K–K

U ovoj konstrukciji primjenjuje se jednom konstrukcija prenošenja dužine i dvaput konstrukcija prenošenja kuta.



11. Konstrukcija trokuta S–S$^{>}$–K$^{>}$

U ovoj konstrukciji primjenjuje se jednom konstrukcija prenošenja dužine i jednom konstrukcija prenošenja kuta.



Napomena. Kratki prikaz osnovnih konstrukcija i njihove osnovne primjene pokazuje da su one vrlo pogodne za razvoj logičkog i stvaralačkog mišljenja učenika. Tvrdnje koje su postavljene u prikazu rezultat su zorne procjene. Sve su one valjane i mogu se dokazati. U osnovnoškolskoj matematici ne provode se svi dokazi, posebno ne u nižim razredima. Zato se ovdje preporučuje ispitivanje i provjera tih svojstava u nekom računalnom programu. Dinamični računalni program **The Geometer's Sketchpad** vrlo je pogodan za tu svrhu. Rad učenika ovim programom pridonosi većoj **motivaciji** učenika, razvija njihov **interes** za matematiku i postupno prerasta u **istraživački rad**.

Literatura

[1] Z. Kurnik, P. Mladinić, R. Svedrec, *Osnovne konstrukcije*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 13 (2004), 65-86.