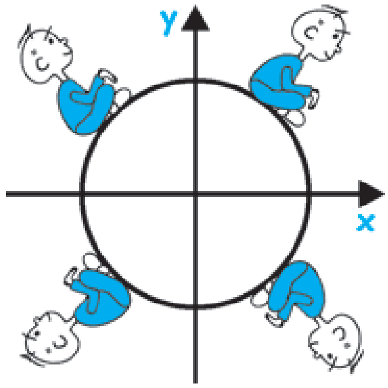


Jednostavna trigonometrijska jednadžba

Branimir Dakić, Zagreb

Često prigovaramo kako je obrada opće trigonometrije dio gradiva koji je štur, apstraktan, učenicima nezanimljiv pa ih i nije lako motivirati i očekivati kako će s interesom sudjelovati u njegovoj obradi. Istina, malo je dobrih primjera kojima bismo podigli interes učenika i koji bi ih uvjerili u opravdanost i svrhu učenja trigonometrije.

No ipak, i u ovom dijelu gradiva skrivaju se razne mogućnosti koje mogu zaokupiti pozornost, pogotovo nadarenijih učenika, koji za matematiku imaju ono posebno čulo, kojima je zadovoljstvo svako novo otkriće. A baš su jednadžbe i nejednadžbe dio gradiva koji pruža široke mogućnosti za raznovrsnu i kreativnu primjenu osnovnih i važnih svojstava trigonometrijskih funkcija.

Rješavajući trigonometrijske jednadžbe sa svojim učenicima imao sam čitav niz zanimljivih doživljaja. Jedan sam, evo, zapisao i za čitatelje MŠ-a.

Riječ je o jednostavnoj jednadžbi

$$\sin x - \cos x = 1.$$

Njezinu je rješavanju, mimo plana, posvećen čitav jedan sat i držim kako je to bilo didaktički učinkovitije negoli rješavanje niza sličnih zadataka.

Jednadžba je vrlo jednostavna pa onda i nije neočekivano što je ubrzo iz razreda stiglo rješenje:

Dvije su mogućnosti:

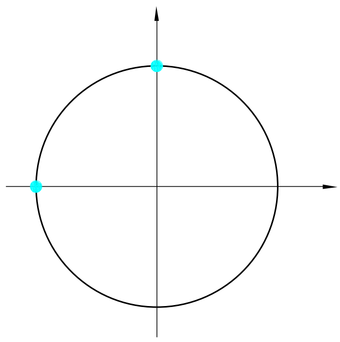
(1) $\sin x = 1$ i $\cos x = 0$ ili

(2) $\sin x = 0$ i $\cos x = -1$.

Prvi sustav ima rješenje: $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ i ono je ujedno i rješenje zadane jednadžbe.

Rješenje drugog sustava je skup $x = (2k-1)\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, što je također rješenje dane jednadžbe.

Prikažimo sva dobivena rješenja na brojevnoj kružnici.



No jesmo li riješili jednadžbu? Kako znamo da smo pronašli sva njezina rješenja? Nismo li možda propustili neko koje nije tako očito?

Pokušajmo riješiti jednadžbu na neki sustavniji način, ne pogađanjem.

Poučen iskustvom primjene nekih postupaka pri ranijem rješavanju nekih trigonometrijskih zadataka, jedan se učenik dosjetio da bismo mogli kvadrirati jednadžbu. Drugi su prihvatili pa smo tako dobili:

$$\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1.$$

Odatle je

$$2\sin x \cdot \cos x = 0,$$

odnosno

$$\sin 2x = 0.$$

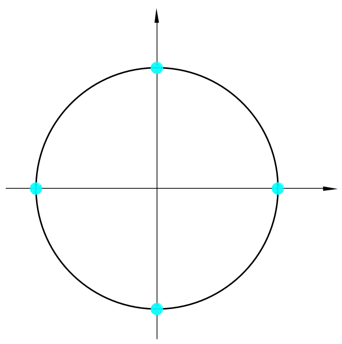
Tako se dolazi do rješenja:

$$2x = k \cdot \pi,$$

odnosno

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Na slici vidimo rješenja prikazana na brojevnoj kružnici.



Usporedbom rješenja vidimo da smo ih sada dobili više negoli pri *pogađanju*. Kako to? No provjerom *viška* uviđamo da $x = k \cdot 2\pi$ i $x = (4k+3) \cdot \dfrac{\pi}{2}$ nisu rješenja zadane jednadžbe. Pa kako to da smo ih onda dobili?

Nema druge, valja na još neki način riješiti jednadžbu.

Neki učenici primjećuju da smo istu jednadžbu mogli riješiti primjenom **univerzalnih supstitucija**. Prisjetimo se, riječ je o formulama u kojima su osnovne trigonometrijske funkcije iskazane kao funkcije varijable $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

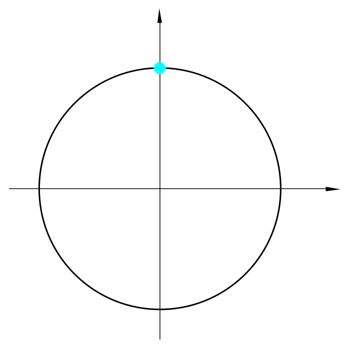
$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Zamijenimo li još $u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, naša će jednadžba poprimiti oblik sljedeće jednostavne algebarske jednadžbe:

$$\frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} = 1.$$

Ova je pak jednadžba ekvivalentna jednadžbi $2u - 1 + u^2 = 1 + u^2$. Slijedi $u = 1$.

Dakle, $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 1$ te je $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ i konačno $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



Uočavamo da se rješenja dobivena svim ovim raznim postupcima ne podudaraju. Zbog čega? O čemu se radi?

Budimo uporni, pokušajmo još i na ovaj način:

pomnožimo li jednadžbu $\sin x - \cos x = 1$ sa $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, dobit ćemo jednadžbu

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sada zamijenimo $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pa imamo

$$\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (*)$$

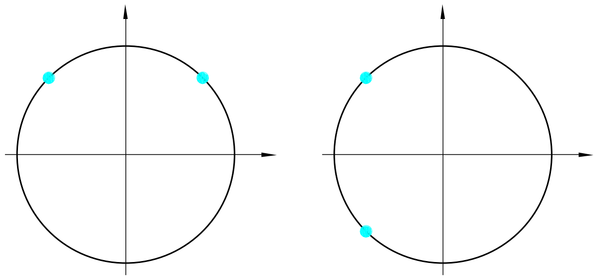
Na lijevoj strani uočimo sinus razlike i jednadžbu zapisujemo u obliku $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. I sada je lako doći do rješenja.

No neki su učenici primijetili kako smo jednadžbu $(*)$ mogli zapisati i na ovaj način:

$$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A tada je $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Razlikuju li se sada ova dva posljednja rezultata? Pogledajmo to na brojevnoj kružnici. Lijevo smo prikazali skup rješenja jednadžbe $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, dok je na slici desno prikazan skup rješenja jednadžbe $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Vidimo, ako na prvoj slici napravimo pomak za $\frac{\pi}{4}$, dobit ćemo dva skupa rješenja: $x=(4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ ili $x=(2k+1)\cdot\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ako se pak na desnoj slici pomaknemo po kružnici za $-\frac{\pi}{4}$, naći ćemo se u istim točkama brojevne kružnice, a time smo dobili i ista rješenja.

No to smo odmah mogli zaključiti. Naime, ako je $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$, onda je $\sin\alpha=-\cos\beta$. Vrijedi dakako i obrnuto. Upravo to imamo i u našem slučaju pa je

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

I sada se vratimo na početak rješavanja naše jednostavne jednadžbe. Uspoređujući tamo dobivena rješenja jednadžbe s ovim posljednjim, za koje nema dvojbe da su točna, vidimo da smo u prvom slučaju *pogodili* rješenje jednadžbe. No kad smo jednadžbu rješavali na drugi način, pojavio se višak, a pri rješavanju na treći način, univerzalnom supstitucijom, dio je rješenja zagubljen.

Zašto?

Primijetimo da kvadriranjem neke jednadžbe općenito ne dobijemo ekvivalentnu jednadžbu. Ako je riječ o algebarskoj jednadžbi, potenciranjem se podiže njezin stupanj. Tako, npr., kvadriramo li linearnu jednadžbu $x=1$, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu $x^2=1$ koja ima dva rješenja, brojeve 1 i -1.

Dakako, jednadžbe $x=1$ i $x^2=1$ nisu ekvivalentne.

Nešto slično često se događa pri rješavanju iracionalnih, ali i drugih jednadžbi, a očito nam se dogodilo i pri rješavanju naše jednadžbe. Zbog toga u ovakvim slučajevima valja provjeriti jesu li svi dobiveni brojevi uistinu i rješenja zadane jednadžbe.

U rješavanju primjenom univerzalnih supstitucija nismo pak dobili brojeve $x=(2k-1)\pi$. Uzrok tomu je što $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ za $x=k\cdot\pi$ nije definiran. To je bitna napomena o kojoj moramo voditi računa kad god neku trigonometrijsku jednadžbu rješavamo univerzalnom supstitucijom.

Kad smo odlučili našu jednadžbu rješavati univerzalnom supstitucijom, odmah na početku trebali smo provjeriti jesu li rješenja jednadžbe brojevi za koje $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nije definiran.

Ponekad se za rješavanje linearnih trigonometrijskih jednadžbi razvija poseban algoritam, ali to ne znači da ćemo zbog toga ustuknuti pri svakoj ranijoj pojavi neke takve jednostavnije jednadžbe.

I na kraju zadržimo se još na jednoj čestoj pojavi pri rješavanju trigonometrijskih jednadžbi. Naime, nije rijedak slučaj da rješavajući istu trigonometrijsku jednadžbu na različite načine dobijemo prividno različita rješenja. Učenici znaju *reklamirati* kako rješenja u knjizi i ona koja su oni dobili nisu ista. A jesu li? Kako provjeriti jesmo li dobili uistinu isto rješenje?

Takav sam jedan primjer također pribilježio, a riječ je o jednadžbi

$$\sin 4x\cdot\sin 2x=\sin 5x\cdot\cos x.$$

To je standardna jednadžba vezana uz primjenu formula pretvorbe, nakon koje dobijemo jednostavniju jednadžbu

$$\sin 2x = \sin 4x.$$

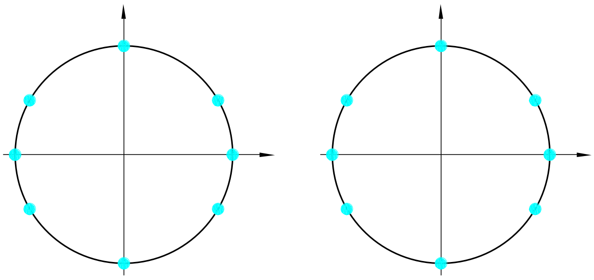
I tu se rješavači razvrstavaju u dvije skupine. Jedni nastavljaju:

$\sin 2x - \sin 4x = \cos 3x \cdot \sin x = 0$, odakle je $\cos 3x = 0$ ili $\sin x = 0$ pa dobijemo rješenje $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$ ili $x = k\pi$.

A drugi idu ovim putem:

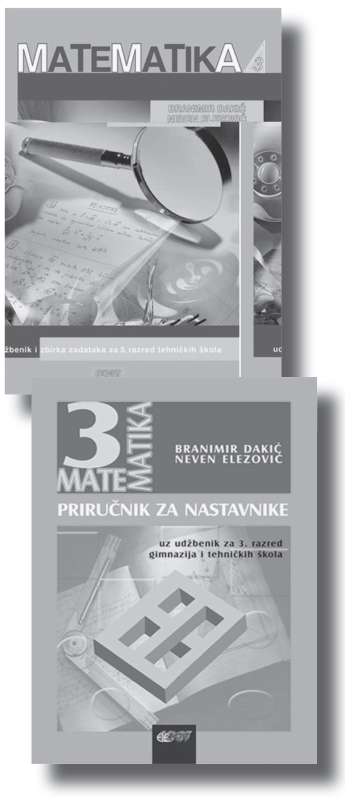
rastavljaju desnu stranu prema identitetu za sinus dvostrukog broja te je $\sin 2x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$. Tada je $\sin 2x = 0$ ili $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Odatle se dobiju rješenja $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ili $x = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Jesu li dobivena rješenja različita? Provjerimo to. Na dvjema brojevnim kružnicama naznačimo skupove rješenja za pojedini od dvaju slučaja i na taj se način uvjerimo da su identična.



NOVO IZ ELEMENTA !!!

NOVO IZ ELEMENTA !!!



12313. B. Dakić, N. Elezović, Matematika 3,
udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred tehničkih škola.
1. izdanje, 330 str., 17 x 24 cm, (novo!) 95 kn.

Ovom knjigom završava komplet udžbenika sa zbirkama zadataka koje su autori već objavili za preostala tri razreda tehničkih škola. Knjiga je rađena prema gimnazijskom udžbeniku, koji je u nekim dijelovima prilagođen potrebama nastavnika i učenika tehničkih škola.

12713. B. Dakić, N. Elezović, Priručnik za nastavnike uz udžbenik Matematika 3 za 3. r. gimnazija i tehničkih škola.
1. izdanje, 142 str., 17 x 24 cm, (novo!) 50 kn.

Priručnik 3 za nastavu matematike prema udžbenicima autora B. Dakića i N. Elezovića koncepcijski slijedi već ranije objavljene priručnike ovih autora u preostalim trima razredima srednje škole. Navedena je orijentacijska satnica za obradu svake od tema, izdvojeni važni sadržaji od onih koji to nisu. Pojedine teme detaljnije su razrađene i imaju metodička objašnjenja. Dani su primjeri pismenih ispita. Na kraju knjige navedeni su dodatni lakši zadaci, kao i u Priručnicima 1 i 2.