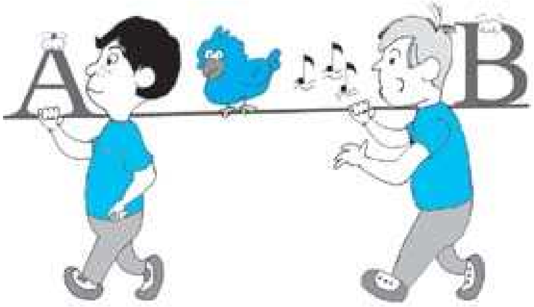
Iz rječnika metodike



Konstruktivne metode

Zdravko Kurnik, Zagreb

U teoriji geometrijskih konstrukcija postoji niz razvijenih metoda rješavanja konstruktivnih zadataka, tako da se dobar dio tih zadataka može obuhvatiti preciznim i sustavnim planom rješavanja.

Glavne geometrijske metode rješavanja konstruktivnih zadataka koje se u nastavi geometrije mogu neposredno primjenjivati, jer za njih učenici uče teorijsku osnovu, jesu:

metoda presjeka,
metoda pomoćnih likova,
metoda osne simetrije,
metoda rotacije,
metoda centralne simetrije,
metoda translacije,
metoda homotetije,
metoda sličnosti.

U geometriji kružnica važnu ulogu igra metoda za koju je potrebna posebna teorijska osnova. To je:

metoda inverzije.

U nacrtnoj geometriji, koja je nekad bila sastavni dio školskog programa matematike, vodeću ulogu imaju dvije metode:

metoda afinosti,
metoda kolineacije.

Često se već iz formulacije konstruktivnog zadatka može naslutiti koju geometrijsku metodu rješavanja treba odabrati. Evo nekoliko primjera takvih konstrukcija.

1) Konstrukcija kružnice zadanog polumjera koja dodiruje dani pravac i danu kružnicu (metoda presjeka).
2) Konstrukcija peterokuta kojem su zadana polovišta stranica (metoda centralne simetrije).
3) Konstrukcija kvadrata kojem su zadani središte i po jedna točka na susjednim stranicama (metoda rotacije).
4) Konstrukcija trokuta kojem su vrhovi na stranicama danog trokuta, a stranice paralelne danim pravcima (metoda homotetije).
5) Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri dane kružnice (metoda inverzije)
6) Konstrukcija tangenata elipse koja je zadana parom konjugiranih promjera, iz točke izvan elipse (metoda afinosti).

Drugu skupinu čine konstruktivni zadaci za koje postoji neka geometrijska metoda rješavanja, ali ona nije lako uočljiva i za njezino otkrivanje potrebno je dosta truda i vremena, pa i dosjetljivosti.

Najčešće nije važno koju smo metodu odabrali za rješavanje nekog konstruktivnog zadatka, važno je da je on uspješno riješen. Međutim, kada se neki konstruktivni zadatak može riješiti na više načina, a takvi zadaci nisu rijetkost, pitanje izbora metode postaje dosta važno. Posebno imamo li na umu da jedna metoda brže vodi do cilja, u drugoj je potreban manji broj nužnih osnovnih konstrukcija, treću karakterizira jasnoća i očitosti itd. U takvim se slučajima kao prirodno načelo nameće *načelo jednostavnosti*. Ovo se načelo može ostvariti samo onda ako smo dobro ovladali geometrijom, konkretno ako u području geometrijskih konstrukcija uistinu poznajemo različite metode rješavanja.

Ponekad se dogodi da ni uza sva nastojanja nismo u stanju otkriti kojom bi se geometrijskom metodom mogao riješiti postavljeni konstruktivni zadatak. Što da radimo u takvim slučajima? Postoji još samo jedna mogućnost izbora:

algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka.

Opisat ćemo one geometrijske konstruktivne metode koje ne izlaze iz okvira školske matematike. Uz svaku metodu dajemo kao ilustraciju potpuno rješenje jednog konstruktivnog zadatka.

Pri rješavanju primjenjujemo tradicionalni postupak koji se sastoji od četiriju koraka. To su:

1) **analiza,**
2) **konstrukcija,**
3) **dokaz,**
4) **rasprava.**

Opis konstrukcije je sažet i prilagođen za primjenu u nekom računalnom dinamičnom programu (*Geometer's Sketchpad, GeoGebra* i dr.).

Metoda presjeka

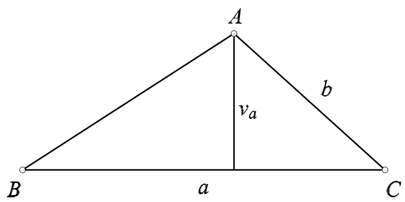
Gotovo sve geometrijske konstrukcije koje se nalaze u programima matematike osnovne i srednje škole neposredno se izvode primjenom **metode presjeka skupova točaka** ili, kako se to na drugi način kaže, **metode geometrijskih mjesta točaka**. Osnovna ideja je vrlo jednostavna. Lik koji treba konstruirati izgrađen je iz točaka i često se može uočiti jedna njegova istaknuta točka koja treba zadovoljavati dva uvjeta. Uvjeti se razdvoje i onda ispituje što tvore sve točke koje zadovoljavaju samo prvi uvjet, a što tvore sve točke koje zadovoljavaju samo drugi uvjet. Na taj se način konstruktivni zadatak razlaže na dva jednostavnija konstruktivna zadatka, a rezultat su dva skupa točaka. Istaknuta točka tražene figure mora zadovoljavati oba uvjeta, što znači da mora pripadati obama skupovima, tj. ona je točka presjeka tih skupova.

Ukratko, bit metode možemo opisati na sljedeći način.

1) Zadaća se svodi na konstrukciju jedne točke.
2) Uvjet se rastavlja na dva dijela, od kojih svaki vodi na jednu krivulju za traženu točku.
3) Tražena točka je sjecište dobivenih krivulja.
4) Da bi konstrukcija bila elementarna, nužno je da svaka od dobivenih krivulja bude pravac ili kružnica.

Primjer 1. Konstruirajmo trokut ABC kojem su zadane duljine a i b dviju njegovih stranica i duljina v_a visine iz vrha A.

Analiza. Pri rješavanju konstruktivnog zadatka uvijek počinjemo pomoćnim crtežom s danim i traženim likovima i ispitujemo odnose među njima.



Lako se konstruiraju vrhovi B i C traženog trokuta.

Treći vrh A mora zadovoljavati sljedeća dva uvjeta:

1) Točka A mora biti udaljena od točke C za duljinu b.

2) Točka A mora biti udaljena od pravca BC za duljinu v_a.

Skup svih točaka koje zadovoljavaju prvi uvjet je kružnica sa središtem u točki C i polumjera b.

Skup svih točaka koje zadovoljavaju drugi uvjet su dva pravca paralelna s pravcem BC i od njega udaljena za v_a.

Metoda: metoda presjeka.

Konstrukcija.

1° Stranica $\overline{BC}$: B, polupravac BD, $C = BD \cap k(B, a)$.

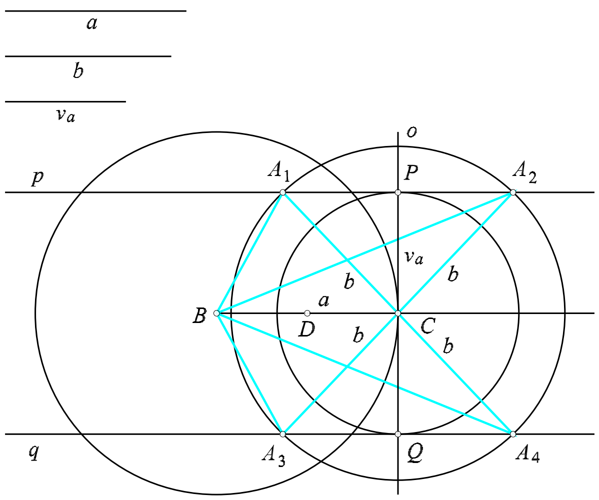
2° Kružnica $k(C, b)$.

3° Okomica o točkom C na pravac BC, P, $Q \in o \cap k(C, v_a)$.

4° Pravci p i q točkama P i Q paralelni s pravcem BC.

5° Vrh A: $p \cap k(C, b)$, $q \cap k(C, b)$ (A_1, A_2, A_3, A_4).

6° Rješenja: trokuti BCA_1, BCA_2, BCA_3, BCA_4.



Dokaz. Dokaz je na temelju analize očit.

Rasprava. Zadatak ima 0, 2 ili 4 rješenja, već prema tome je li b manji, jednak ili veći od v_a. U slučaju kad zadatak ima 2 ili 4 rješenja, po dva rješenja su sukladna, što znači da zadatak ima 1 ili 2 bitno različita rješenja. Sukladna rješenja obično se ne promatraju.

Metoda pomoćnih likova

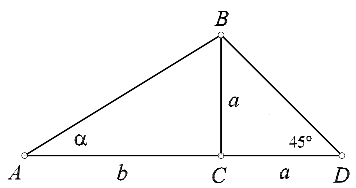
Pri rješavanju konstruktivnog zadatka često se koristi dio crteža kako bi se dobio neki pomoćni lik čiju konstrukciju na temelju poznatih činjenica nije teško provesti.

Do pomoćnih likova obično dolazimo produživanjem ili skraćivanjem neke dužine, povlačenjem dodatnih dužina, paralela ili okomica, tvorbom pomoćnih mnogokuta, opisivanjem pomoćnih kružnica i sl.

Nakon konstrukcije pomoćnog lika slijedi konstrukcija traženog lika na lako uočljiv način.

Primjer 2. Konstruirajmo pravokutni trokut ABC ako je zadan njegov kut α i zbroj $a+b$ duljina a i b njegovih kateta.

Analiza. Neka je ABC traženi pravokutni trokut. Trokut je potrebno nadopuniti novim elementima tako da se dobije lik u kojem je jedan element dužina duljine $a+b$. Postoje dvije uočljive mogućnosti nadopunjavanja: produživanje katete $\overline{AC}$ i produživanje katete $\overline{BC}$. Odabrat ćemo jednu.

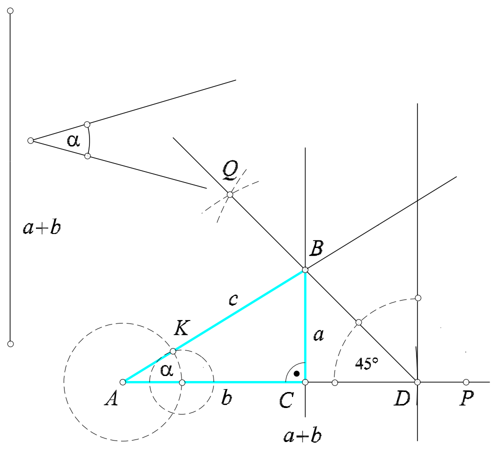


Produžimo katetu $\overline{AC}$ za dužinu $\overline{CD}$ duljine a. Promatrajmo trokut ABD. On ima s pravokutnim trokutom zajedničku stranicu $\overline{AB}$ i može se konstruirati ($|AD| = a+b$, $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ADB = 45°$). Nakon toga nije teško konstruirati ni pravokutni trokut ABC.

Metoda: metoda pomoćnih likova (pomoćni lik: trokut ADB).

Konstrukcija.

1° Dužina $\overline{AD}$: točka A, polupravac AP, $D = AP \cap k(A, a+b)$.
2° Kut $\sphericalangle DAK = \alpha$ (prenošenje kuta).
3° Kut $\sphericalangle ADB = 45°$ (simetrala DQ pravog kuta).
4° Vrh B: $AK \cap DQ$.
5° Okomica iz točke B na polupravac AP.
6° Vrh C: presjek okomice i polupravca AP.
7° Rješenje: trokut ABC.



Dokaz. Dokaz je na temelju analize očit.

Rasprava. Zadatak ima uvijek jedno rješenje.

Metoda osne simetrije

Metoda osne simetrije pri rješavanju konstruktivnog zadatka počinje tako da se neki od danih likova zamijeni likom koji je njemu simetričan obzirom na neki pravac. Zatim se taj osnosimetrični lik promatra u istim uvjetima u kojima i zamijenjeni lik. Kao rezultat dobiva se novi zadatak koji se rješava na neki od poznatih načina. U većini se slučajeva nakon toga može polazni zadatak lako riješiti.

Najčešće se konstruira osnosimetrična slika neke dane točke, ali ponekad je potrebno preslikati i neki pravac, kružnicu ili mnogokut.

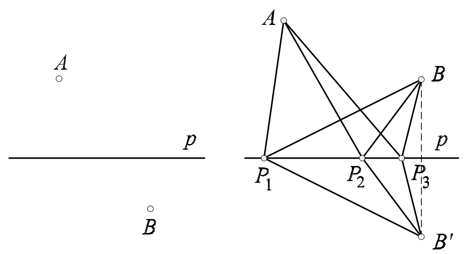
Na mogućnost primjene metode osne simetrije mogu ukazivati izvjesni pojmovi koji se neposredno ili posredno pojavljuju u formulaciji konstruktivnog zadatka, kao što su: *simetrala dužine*, *simetrala kuta*, *pravi kut*, *ekstremalno svojstvo udaljenosti* i dr.

Primjer 3. Dan je pravac p i dvije točke, A i B. Na pravcu p konstruirajmo točku P za koju je zbroj udaljenosti $|AP| + |PB|$ najmanji.

Analiza. U zadatku se navodi ekstremalno svojstvo izlomljene linije APB. Zato je gotovo sigurno koju metodu treba primijeniti.

Metoda: metoda osne simetrije.

U zadatku nije rečeno s koje su strane danog pravca dane točke. Zato trebamo razlikovati dva slučaja.

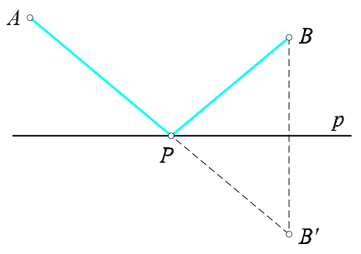


U slučaju kad su točke A i B s različitih strana pravca p, točku P dobivamo neposredno kao presjek pravaca AB i p.

U slučaju kad su točke A i B s iste strane pravca p, do točke P doći ćemo razmatranjem osnosimetrične slike jedne od tih točaka, recimo točke B, i nekoliko točaka pravca p. Za točke P_1, P_2, P_3 uočavamo da su zbrojevi udaljenosti $|AP_1| + |P_1B|$ i $|AP_1| + |P_1B'|$, $|AP_2| + |P_2B|$ i $|AP_2| + |P_2B'|$, $|AP_3| + |P_3B|$ i $|AP_3| + |P_3B'|$ jednaki. Najmanji takav zbroj očito dobivamo kad je točka pravca p na pravcu AB'. Tako otkrivamo točku P.

Konstrukcija. Malobrojni koraci konstrukcije su jasni i jednostavni.

1° Konstrukcija simetrične točke B' točki B obzirom na pravac p.
2° Točka P: $AB' \cap p$.



Dokaz. Dokaz je na temelju analize očit.

Rasprava. Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje.

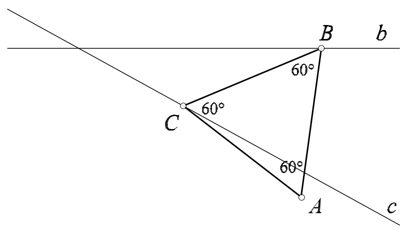
Metoda rotacije

Konstruktivni zadatak rješava se primjenom metode rotacije ako je promatrani lik teško analizirati, ali je lako analizirati lik koji nastaje zakretanjem promatranog lika oko određene točke za neki kut. Središte rotacije i kut zakretanja treba odabrati tako da se nakon toga sukladni likovi preslikaju jedan u drugog ili da se dobije njihov jednostavniji položaj. Na taj se način polazni zadatak svodi na jednostavniji zadatak ili zadatak koji je ranije riješen.

Na mogućnost primjene metode rotacije mogu ukazivati sljedeći pojmovi u formulaciji konstruktivnog zadatka: *središte*, *određeni kut*, *sukladne dužine* i dr.

Primjer 4. Dani su točka A i pravci b, c. Konstruirajmo jednakostranični trokut ABC tako da mu je vrh B na pravcu b, a vrh C na pravcu c.

Analiza. Neka je ABC traženi trokut.



Imamo točku A i kut od $60°$ koji karakterizira jednakostranični trokut. Ta dva elementa su dovoljna za jednu rotaciju.

Metoda: metoda rotacije.

Kako pomoću rotacije doći do ostalih dvaju vrhova trokuta? Uočimo da se rotacijom oko središta A za kut od $60°$ točka B preslikava u točku C. Ali mi ne znamo gdje je točno točka B, već samo znamo da je ona na pravcu b. Zato umjesto da rotiramo tu točku, rotirat ćemo njezinog nosioca, pravac b. Tako otkrivamo da je vrh C presjek pravca c i slike b' pravca b. Nalaženje vrha B nakon toga je lako.

Budući da rotaciju možemo izvoditi i u suprotnom smjeru, postoje dva rješenja.

Konstrukcija.

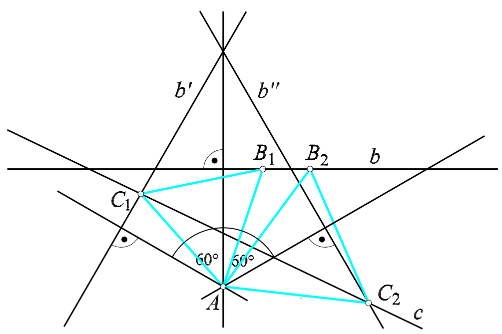
1° Rotacija pravca b oko središta A za kut od $60°$: b'.

2° Vrh C_1: $b' \cap c$.

3° Vrh B_1: rotacija točke A oko središta C_1, $A' = B_1$.

4° Prvo rješenje: jednakostranični trokut AB_1C_1. Drugo rješenje dobiva se analogno.

5° Rotacija pravca b oko središta A za kut od $-60°$: b'' itd.



Dokaz. Dokaz je na temelju analize očit.

Rasprava. Broj rješenja ovisi o položaju točke A prema pravcima b i c i o veličini kuta tih pravaca. Zadatak nema rješenja ako je $A = b \cap c$ i $\sphericalangle(b, c) \neq 60°$. Zadatak ima 1 rješenje ako je $A \neq b \cap c$ i $\sphericalangle(b, c) = 60°$. Zadatak ima 2 rješenja ako je $A \neq b \cap c$ i $\sphericalangle(b, c) \neq 60°$. Zadatak ima beskonačno mnogo rješenja ako je $A = b \cap c$ i $\sphericalangle(b, c) = 60°$.

Metoda centralne simetrije

Centralna simetrija je vrsta rotacije, rotacija za 180°. Zato je nije potrebno posebno opisivati. Izdvaja se pod posebnim nazivom zbog svojih svojstava i jednostavne i lako uočljive primjene.

Na mogućnost primjene metode centralne simetrije mogu ukazivati sljedeći pojmovi u formulaciji konstruktivnog zadatka: *polovište dužine*, *paralelne i sukladne dužine*, *paralelni pravci*, *ispruženi kut* i dr.

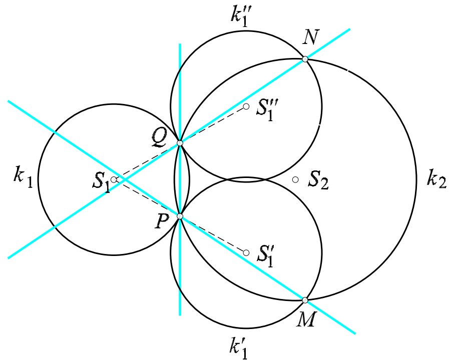
Primjer 5. Sjecišta dviju kružnica, k_1 i k_2 su točke P i Q. Svakom od tih točaka povucimo pravac koji na kružnicama odsijeca tetive jednakih duljina.

Analiza. Najprije lako uviđamo da pravac PQ odsijeca na kružnicama zajedničku tetivu. Dalje uviđamo da su točke P i Q polovišta dviju dužina na traženim pravcima, pa one mogu poslužiti kao središta centralnih simetrija. To znači da do druge točke svakog traženog pravca možemo doći preslikavanjem kružnice k_1 (ili k_2) preko točaka P i Q.

Metoda: metoda centralne simetrije.

Konstrukcija.

1° Prvo rješenje: pravac PQ.
2° Centralna simetrija kružnice k_1 (centar P): k_1'.
3° Drugo rješenje: pravac PM, spojnica sjecišta kružnica k_1' i k_2.
4° Centralna simetrija kružnice k_1 (centar Q): k_1''.
5° Treće rješenje: pravac QN, spojnica sjecišta kružnica k_1'' i k_2.



Dokaz. Dokaz je na temelju analize očit.

Rasprava. Zadatak uvijek ima tri rješenja.

Metoda translacije

Metoda translacije pri rješavanju konstruktivnog zadatka sastoji se u tome da se promatrani lik pomakne za neki vektor i da se analiza, odnosno konstrukcija lika svede na analizu, odnosno konstrukciju pomoćnog i jednostavnijeg lika. Zatim se izvrši pomak u suprotnom smjeru u cilju analize, odnosno konstrukcije traženog lika.

Na mogućnost primjene metode translacije mogu ukazivati sljedeći pojmovi u formulaciji konstruktivnog zadatka: *paralelnost*, *vektor*, *dužina na pravcu* i dr.

Primjer 6. Između mjesta M i N izgrađen je kanal za navodnjavanje s paralelnim rubovima a i b, širine d. Gdje treba postaviti most preko kanala pa da put između mjesta M i N bude najkraći?

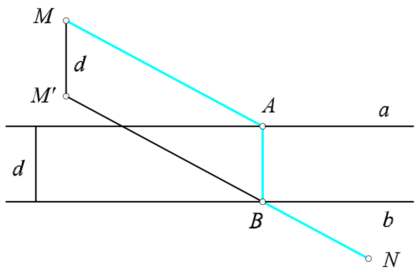
Analiza. U formulaciji zadatka imamo paralelnost, a traženi most geometrijski je dužina zadane duljine i zadanog smjera. To je dovoljno da naslutimo metodu rješavanja.

Metoda: metoda traslacije.

Traženi put sastoji se od triju dijelova od kojih je most srednji dio. Neka je taj put izlomljena linija $MABN$. O mostu jedino više znamo i zato je najbolje da taj dio puta odmah "prijeđemo" iz jednog mjesta, recimo M, primjenom translacije. Da bi cijeli put bio najkraći, preostali dio puta treba tada biti dio pravca.

Konstrukcija.

1° Translacija točke M za vektor duljine d okomit na rubove kanala: slika M'.
2° Krajnja točka mosta B: $M'N \cap b$.
3° Krajnja točka mosta A: sjecište ruba kanala a i okomice na rub b u točki B.
4° Rješenje: izlomljena linija $MABN$.



Dokaz. Treba dokazati da je konstruirani put $MABN$ najkraći. To jednostavno slijedi iz činjenice da je zamišljeni put $MM'BN$ najkraći. A ta dva puta očito su jednake duljine.

Rasprava. Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje.

Metoda sličnosti

Bit ove metode pri rješavanju konstruktivnih zadataka sastoji se u sljedećem: najprije se iskoriste svojstva sličnih likova pri traženju zavisnosti između zadanih i traženih elemenata, zatim se odbacivanjem nekog dijela uvjeta koji karakterizira razmjere traženog lika zadatak svede na konstrukciju lika koji je njemu sličan, a onda se konstruirani pomoćni lik podvrgava preslikavanju sličnosti tako da bi nakon toga bio ispunjen i odbačeni dio uvjeta. Kao rezultat dobiva se traženi lik.

Homotetija je poseban slučaj sličnosti, pa je nećemo izdvajati u posebni odjeljak.

Na mogućnost primjene metode sličnosti mogu ukazivati sljedeći pojmovi u formulaciji konstruktivnog zadatka: *proporcionalnost dužina*, *omjer*, *središte sličnosti*, *paralelnost* i dr.

Primjer 7. Konstruirajmo kvadrat $ABCD$ ako je zadana udaljenost p polovišta P stranice $\overline{CD}$ od vrha A.

Analiza. Ovdje će analiza biti kratka. Svaka dva kvadrata su slična. Zato je konstrukcija dosta jednostavna. Najprije se konstruira bilo koji kvadrat, uoči udaljenost jednog njegovog vrha od polovišta jedne nasuprotne stranice, a zatim konstruira kvadrat kojemu je takva udaljenost točno p.

Metoda: metoda sličnosti.

Konstrukcija.

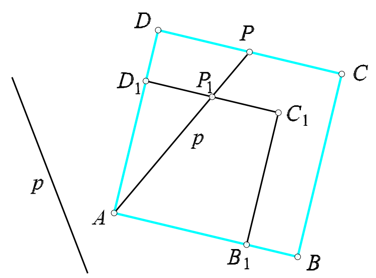
1° Konstrukcija bilo kojeg kvadrata $AB_1C_1D_1$ i polovišta P_1 njegove stranice $\overline{C_1D_1}$.

2° Konstrukcija dužine $\overline{AP}$ na pravcu AP_1 duljine p.

3° Konstrukcija kvadrata $ABCD$ tako da je P polovište njegove stranice $\overline{CD}$.

Dokaz. Dokaz je na temelju analize očit.

Rasprava. Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje. Zadatak je riješen primjenom metode sličnosti, preciznije rečeno primjenom metode homotetije, ali mogao se brzo riješiti još na dva načina: primjenom metode presjeka i primjenom algebarske metode.



Literatura

[1] Z. Kurnik, *Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadaća*, DMM "Pitagora", Beli Manastir, 1990.

[2] Z. Kurnik, *Geometrijske konstrukcije*, Poučak **9** (2002.), 34. – 41.

[3] Z. Kurnik, P. Mladinić, R. Svedrec, *Osnovne konstrukcije*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 13 (2004.), 65. – 86.

[4] Z. Kurnik, *Osnovne konstrukcije i osnovna primjena*, Matematika i škola **29** (2005.), 148. – 152,

[5] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.