

Matematička križaljka

Zdravko Kurnik, Zagreb

Matematika je bez sumnje teži nastavni predmet, pa pri usvajanju novog gradiva učenici često osjećaju stanovit psihološki pritisak. S druge strane, u nastavi matematike još uvijek prevladavaju tradicionalni oblici rada i nastavne metode, a njezin osnovni cilj je puko usvajanje gradiva propisanog nastavnim programom i stjecanje znanja koja se temelje na nizu pravila, formula i umijeća rješavanja standardnih zadataka. To nije dobro. Umjesto opterećenja pamćenja učenika velikim brojem činjenica treba pobuđivati i pokretati njihovo mišljenje i nastojati da dobar dio novih znanja stječu vlastitim snagama i sposobnostima. Da bi se to postiglo, nužno je neprestano osuvremenjivati nastavu matematike.

Osuvremenjivanje, posebno u nastavi matematike u osnovnoj školi, može se u prvom koraku postići češćom izmjenom poznatih nastavnih metoda i njihovim poboljšanjem. Ali to nije dovoljno. Potrebno je uvoditi **nove oblike rada**, promijeniti uvriježenu predodžbu o matematici i pokazati da matematika može biti lagana i zabavna. Naravno, uvođenje novih oblika rada zahtijeva od nastavnika matematike ozbiljnu pripremu i dodatni napor. Međutim, sve to ne bi trebalo biti ništa prema zadovoljstvu koje bi trebao osjećati nastavnik matematike kad vidi interes učenika i njihovo usvajanje novog gradiva bez psihološkog opterećenja i prisile. Evo nekih suvremenih mogućnosti:

izrada panoa, izrada modela geometrijskih tijela, matematički kvizovi, matematičke igre, matematičke križaljke, matematički

projekti, matematička otkrića pomoću računala, školski matematički časopis, matematika u svijetu oko nas i dr.

U ovom članku predmet našeg interesa je jedan od tih oblika: **matematička križaljka**.

Križaljke se danas mogu naći u gotovo svim novinama i časopisima. One omogućuju da se čovjek u slobodno vrijeme opusti, odmori i pripremi za nastavak nekog novog napornog rada.

Ovaj oblik razonode pogodan je za primjenu i u nastavi matematike. Matematičke križaljke mogu se vrlo korisno uporabiti kao svojevrsni **testovi i ispiti znanja**. Rješavajući matematičke križaljke učenici zapravo kroz zabavu ponavljaju i utvrđuju obrađeno gradivo. Za razliku od standardnih ispita znanja, matematička križaljka ima i neke posebne značajke:

- zadaci su jednostavni i nastoji se da se u njihovim formulacijama istaknu neobični i zanimljivi odnosi među brojevima,
- rješenja svih zadataka su prirodni brojevi,
- rješenja se slažu u mrežu križaljke i svako rješenje ima zajedničku znamenku s još barem jednim rješenjem,
- broj kvadratića u koja se upisuje neko rješenje ukazuje na broj znamenki samog rješenja.

Jednostavnost, neobičnost, povezanost i zornost u matematičkoj križaljci doprinose tome da se interes rješavača prema matematici mijenja, povećava i razvija.

Matematička križaljka može se primijeniti u svakoj fazi nastavnog procesa. Opisat ćemo neke karakteristične situacije.

1. Početak školske godine.

Uobičajni inicijalni testovi i ispiti znanja odmah na početku školske godine često uznemire učenike, jer oni još nisu spremni za tako ozbiljan rad. Budući da nastava matematike još nije “ozbiljno” krenula, matematička križaljka sa zadacima iz gradiva prethodnog razreda vrlo je pogodno sredstvo da nastavi da početni zamah. Već sam njezin naziv daleko je od neke prisile, učenicima je neobična i zanimljiva, a nastavnik ipak može dobiti potrebnu informaciju o stupnju usvojenosti navedenog gradiva.

◇ Posebno je važno uočiti poteškoće učenika pri njihovom prijelazu iz **razredne u predmetnu nastavu** i primjereno reagirati. Učitelj matematike može i treba pomoći tim učenicima da taj prijelaz i postojeće praznine u znanju što lakše prevladaju. Evo primjera matematičke križaljke za provjeru znanja gradiva četvrtog razreda na početku petog razreda (Matka 49):

1	2		3		4	5
6		7			8	
	9			10		
11			12			13
14					15	

Vodoravno: **1.** Duljina druge stranice pravokutnika kojemu je duljina jedne stranice 43 i površina jednaka 3096. **3.** MCDXCIII. **6.** $2004 - 2004 : 12$. **8.** Obujam kvadra čije su duljine bridova iz istog vrha 1, 2 i 43. **9.** $1111 - (987 + 65)$. **10.** $9407 : 97$. **11.** Vrijednost izraza $55 - 5 : 5 + 5 \cdot 5 + 5$. **12.** $3388 - 33 \cdot 88 + 3777$. **14.** $45225 : 15$.

15. Opseg trokuta čije su duljine stranica 17, 17 i 16.

Okomito: **1.** $777 - 551 - 155$. **2.** Dvadeset osam tisuća petsto četrdeset. **3.** $1683 : (1098 - 999)$. **4.** Najveći peteroznamenasti broj sastavljen od različitih znamenki. **5.** Površina kvadrata kojemu je opseg jednak 24. **7.** XXXIX. **10.** Opseg pravokutnika kojemu su duljine stranica 12 i 34. **11.** $(1000 - 918) + 1$. **12.** Zbroj svih jednoznamenastih brojeva. **13.** Broj trokuta što ih određuje pet točaka od kojih nikoje tri ne pripadaju istom pravcu.

Napomene. U lik križaljke upisuju se rješenja 20 jednostavnih zadataka (10 vodoravno i 10 okomito). Malo složeniji je kombinatorni zadatak pod 13. okomito, gdje se preporučuje da učenici dane točke označe slovima i prije upisa ispisuju sve postojeće trokute.

Možda učenici ne mogu stići riješiti sve navedene zadatke na jednom nastavnom satu. Već iz djelomičnog rješavanja učitelj može mnogo toga zaključiti, a rješavanje učenici mogu nastaviti kod kuće kao prvu domaću zadaću.

U ovom slučaju provjeru znanja treba obaviti individualnim radom učenika.

2. Nastavne jedinice

Svaka nastavna jedinica obično završava provjeravanjem jesu li učenici shvatili i usvojili novo gradivo. Provjeravanje se vrši usmeno ili pismeno. Ako se provjeravanje vrši pismeno, onda je moguće da se standardni listić sa zadacima i pitanjima zamijeni listićem s likom jedne male matematičke križaljke i provjera usvojenosti obavi na ovaj novi način.

◇ Za ilustraciju smo izabrali nastavnu jedinicu **Pravila djeljivosti** u poglavlju **Djeljivost prirodnih brojeva** iz programa matematike za peti razred. U ovoj nastavnoj jedinici učenici trebaju usvojiti i znati primjenjivati pravila djeljivosti s 10, 5, 2, 3 i 9. Evo primjera matematičke križaljke za provjeru tog znanja:

1	2		3
4			
		5	
6			

Vodoravno: 1. Najveći četveroznamenasti broj sastavljen od različitih znamenki i djeljiv s 9. **4.** Upiši broj svih prirodnih brojeva manjih od 50 koji su djeljivi s 2. **5.** Najveći dvoznamenkasti broj djeljiv s 9. **6.** Najmanji četveroznamenasti broj djeljiv s 3.

Okomito: 1. Izdvoji broj u skupini 1110, 2005, 5880, 9261, 9940 koji nije djeljiv s 5. **2.** Broj između 80 i 90 djeljiv i s 2 i s 3. **3.** Od brojki 2, 3, 5, 9 sastavi najmanji broj djeljiv s 2. **5.** Upiši broj svih troznamenkastih brojeva djeljivih s 10.

Napomene. Budući da u nastavnoj jedinici etapa provjeravanja usvojenosti obrađenog gradiva traje kratko, matematička križaljka ne smije biti velika i prezahtjevna. U našoj križaljki upisuju se rješenja 8 zadataka (4 vodoravno i 4 okomito).

Zadaci su po svojoj naravi kombinatorni, potiču na promišljanje i logičko zaključivanje, ali nisu preteški.

Najbolji oblik rada i u ovom slučaju je individualni rad učenika.

Za obradu navedenog matematičkog sadržaja često su potrebna dva nastavna sata.

3. Tromjesečja

Primjena matematičkih križaljki ne smije biti prečesta, jer može postati zamorna i odbojna, već treba biti primjerena interesu učenika. Tromjesečje je dosta dug vremenski period nakon kojeg se interes učenika za rješavanje matematičkih križaljki složenijeg tipa i učenje matematike na ovaj način ponovo može pojačati.

Najbolji oblik rada pri rješavanju ovog tipa križaljki je rad u parovima. Ako se u rad želi unijeti natjecateljski duh, može se primijeniti i grupni rad.

Prvo tromjesečje

Za ilustraciju najprije navodimo primjer matematičke križaljke u kojoj se obrađuju matematički sadržaji u prvom tromjesečju šestog razreda. U tom tromjesečju obrađuju se sljedeća dva poglavlja programa matematike:

Operacije s razlomcima, Trokut.

Križaljka (Matka 50):

1	2			3	4	5	6
7			8				
9		10			11		
	12			13			14
15			16			17	
18					19		

Vodoravno: 1. Opseg pravokutnika kojem su duljine susjednih stranica $85\frac{3}{5}$ i $95\frac{2}{5}$.

3. $\left(20 - \frac{19}{2} - \frac{25}{3}\right) \cdot 2004$. **7.** Najmanji za-

jednički nazivnik razlomaka $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{7}$. **8.** $\frac{37}{99}$ od 63063. **9.** Broj sati u 6 tjedana i 3 dana.

11. $\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{8}\right) : \frac{1}{48}$. **12.** $\frac{14}{11} \cdot \frac{198}{7}$. **13.** Površina kvadrata kojem je opseg jednak 352.

15. Obujam kvadra kojem su duljine bridova iz istog vrha $\frac{81}{10}$, 60 i 197. **17.**

$12 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$. **18.** $\frac{26}{3} \cdot \frac{357}{10} \cdot \frac{55}{17}$. **19.** $2 \cdot 11 \cdot 41$.

Okomito: 1. $19 : \frac{1}{19} + 20$. **2.** Put u metrima što ga avion za $\frac{3}{4}$ sata preleti brzi-

nom od $853\frac{4}{5}$ kilometara na sat. **3.** Duljina visine trokuta kojem je duljina osnovice

- 32, a površina 688. **4.** MMMDLXXXVII. **5.** Četiristo šezdeset dvije tisuće četiristo dvadeset. **6.** $13\frac{3}{10} + 15\frac{7}{10}$. **8.** $\frac{15}{4}$ od $\frac{16}{3}$. **10.** $30 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{289}$. **13.** Najmanji zajednički nazivnik razlomaka $\frac{1}{12}$ i $\frac{1}{18}$. **14.** $\frac{3}{10}$ dana u minutama. **15.** $\frac{7}{36} : \frac{1}{468}$. **16.** Opseg trokuta kojem su duljine stranica redom tri najmanja dvoznamenkasta prosta broja.

Napomene. Sada je oblik križaljke složeniji i u njezin lik upisuju se rješenja od nešto više zadataka. Ukupno ih ima 24 (12 vodoravno i 12 okomito).

Neki zadaci su iz programa matematike prethodnog razreda, što je oblik stalnog utvrđivanja ranije obrađenih matematičkih sadržaja.

Drugo tromjesečje

Za ilustraciju navodimo primjer matematičke križaljke u kojoj se obrađuju matematički sadržaji u drugom tromjesečju sedmog razreda. U tom tromjesečju obrađuju se sljedeća dva poglavlja programa matematike: **Sličnost trokuta**, **Mnogokuti**.

Križaljka (Matka 51):

1	2	3		4		5	6
7				8	9		
		10			11		
	12			13			14
15			16		17	18	
19			20				

- Vodoravno: 1.** Površina pravokutnika kojem su duljine stranica a i b rješenje sustava jednadžbi $a - b = 100$, $3a - 8b = -80$. **5.** Vrijednost funkcije $f(x) = \frac{18}{7}x$ za $x = \frac{28}{3}$.

- 7.** DII. **8.** Umnožak članova uređenog para koji je rješenje sustava jednadžbi $x = y$, $6x - y = 470$. **10.** Broj stranica mnogokuta kojem se iz jednog vrha može povući ukupno 67 dijagonala. **11.** L. **12.** Vrijednost druge nepoznanice y u jednadžbi $18x + 5y = 3$ ako je vrijednost prve nepoznanice $x = -26\frac{1}{2}$. **13.** Koeficijent obrnute proporcionalnosti u kojoj je $(\frac{20}{3}, \frac{27}{10})$ par obrnuto proporcionalnih veličina. **15.** Površina pravilnog četverokuta kojem je duljina stranice rješenje jednadžbe $\frac{x-9}{5} = 10$. **17.** Vrijednost izraza $100x - 9y + 31$ za $x = \frac{9}{5}$, $y = -\frac{88}{3}$. **19.** Koeficijent proporcionalnosti u kojoj je $(\frac{3}{28}, \frac{1}{700})$ par proporcionalnih veličina. **20.** Zbroj svih unutarnjih kutova 146-erokuta izražen u stupnjevima.

- Okomito: 1.** Vrijednost funkcije $f(x) = \frac{32}{x}$ za $x = \frac{4}{19}$. **2.** Broj vrhova mnogokuta koji ima ukupno 405 dijagonala. **3.** Opseg pravilnog 32-terokuta kojem je duljina stranice rješenje jednadžbe $\frac{24}{x-1000} = 1$. **4.** Duljina stranice pravilnog četverokuta kojem je površina 4624. **5.** Broj dijagonala 23-terokuta. **6.** Jedan član uređenog para koji je rješenje sustava jednadžbi $6x + y = 70$, $23x - 2y = 0$. **9.** Površina kvadrata kojem je opseg jednak 1172. **12.** Opseg pravilnog mnogokuta kojem su broj stranica n i duljina stranice a rješenje sustava jednadžbi $n + a = 66$, $n - 2a = 3$. **14.** Veličina unutarnjeg kuta pravilnog 12-erokuta izražena u stupnjevima. **15.** Broj dijagonala 40-erokuta iz jednog vrha. **16.** Broj stranica mnogokuta koji ima dva puta više dijagonala od deveterokuta. **18.** Zbroj članova uređenog para koji je rješenje sustava jednadžbi $x - y = 10$, $3x - 4y = -1$.

Napomene. U lik križaljke upisuju se rješenja 24 zadatka (12 vodoravno i 12 okomito).

Budući da se u navedenim poglavljima radi samo o geometrijskim sadržajima, koji nisu

najprikladniji za obradu u matematičkoj križaljki, u križaljku su uvršteni i zadaci iz ranije obrađenog poglavlja **Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost**, ponovo s ciljem utvrđivanja ranije stečenog znanja. Ima i zadataka kojima se želi pobuditi malo istraživanje učenika.

Treće tromjesečje

Za ilustraciju navodimo primjer matematičke križaljke u kojoj se obrađuju matematički sadržaji u trećem tromjesečju osmog razreda. U tom tromjesečju obrađuju se dva poglavlja programa matematike: **Geometrija prostora** i **Geometrijska tijela**.

Križaljka (Matka 52):

1	2		3		4	5	6
7			8	9			
10		11		12			
	13		14		15		16
17				18		19	
20			21				

Vodoravno: 1. Obujam pravilne šesterostrane piramide kojoj je duljina osnovnog brida 12, a duljina visine $\frac{89}{6}\sqrt{3}$. **4.** $17^3 - 2^2 \cdot 10^3$. **7.** Broj parova paralelnih pravaca od kojih svaki sadrži brid kocke. **8.** Obujam kvadra kojem duljine bridova a , b i c zadovoljavaju jednakosti $a - b = 41$, $b - c = 1$, $2a = 5c$. **10.** Oplošje kocke kojoj je obujam jednak $1458\sqrt{2}$. **12.** Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta kojem su duljine kateta 240 i 551. **13.** Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta ako su duljine njegovih kateta 2 i 20. **15.** Polumjer osnovke uspravnog stošca kojem je površina plašta 7600π , a duljina izvodnice 50. **17.** $(1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3$. **19.** Polumjer sfere kojoj je površina jednaka 33124π . **20.** Duljina visine valjka kojem su polumjer osnovke i ta duljina prirodni brojevi,

a oplošje i volumen jednaki 5760π , odnosno 41984π . **21.** Zbroj obujmova kocaka s duljinama bridova 1, 10, 14 i 15.

Okomito: 1. $6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 - 11$. **2.** Obujam kocke kojoj je oplošje jednako 26136. **3.** Kut u stupnjevima što ga dijagonala kvadra kojemu su duljine bridova $a = 3$, $b = 4$ i $c = 5$, zatvara s osnovkom. **4.** Površina osnovke pravilne kvadratne piramide kojoj je duljina visine $66\sqrt{2}$, a duljina pobočnog brida $\frac{165}{2}\sqrt{2}$. **5.** Prvih šest decimala broja π . **6.** Polumjer kugle kojoj je obujam jednak 36000π . **9.** Broj pravaca od kojih svaki prolazi kroz dva vrha osnovaka šesterostrane prizme. **11.** Oplošje kvadra čije duljine bridova a , b , c zadovoljavaju jednakosti $a : b : c = 5 : 6 : 9$, $a + b + c = 80$. **14.** Broj pobočaka piramide kojoj je osnovka pravilni mnogokut sa zbrojem unutarnjih kutova 8280° . **16.** Obujam kvadra kojem su površine triju strana koje imaju zajednički vrh jednake 30, 35 i 42. **17.** Broj ravnina simetrije uspravne pravilne deseterostrane prizme. **18.** Duljina izvodnice uspravnog stošca kojem je duljina visine 35, a obujam 1680π .

Napomene. U lik križaljke upisuju se rješenja 24 zadatka (12 vodoravno i 12 okomito).

4. Kraj školske godine

Vrijeme kad se približava kraj školske godine, kad su ocjene iz matematike možda već zaključene, “kad je sve gotovo”, upravo je vrijeme vrlo prikladno za primjenu matematičke križaljke. Ona u ovom slučaju u opuštenu atmosferu omogućuje nastavniku matematike i dalje aktivan rad s učenicima i zadnje “provjeravanje znanja”.

◇ Završit ćemo primjerom matematičke križaljke u kojoj se obrađuju odabrani sadržaji iz cijele osnovnoškolske matematike. Naravno, uporaba matematičke križaljke ovog tipa moguća je samo na kraju osmog razreda.

Križaljka (Matka 37):

1	2	3	4		5		6	7	8
9				10			11		
12			13			14			
		15			16				17
	18				19			20	
21				22			23		
24						25			

Vodoravno: **1.** Površina pravokutnika kojem duljine stranica zadovoljavaju jednakosti $5a + b = 333$, $7a - b = -165$. **5.** $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 - 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16$. **9.** Najmanji zajednički višekratnik prvih sedam prostih brojeva. **11.** $3^2 + 4^2 + (3 \cdot 4)^2$. **12.** Rješenje jednadžbe $x - 3(x+3) + 7(x-7) = 177$. **13.** Najveći dvoznamenkasti prosti broj. **14.** CCLXV. **15.** Period u decimalnom prikazu razlomka $\frac{11}{13}$. **18.** Put u kilometrima što ga preleti avion za 42 minute brzinom 900 km/sat. **19.** $D(784, 1274, 1862)$. **20.** Vrijednost funkcije $f(x) = -\frac{22}{5}x - \frac{9}{2}$ za $x = -\frac{45}{4}$. **21.** $18^2 - 17^2 + 16^2 - 15^2 + 14^2 - 2^3$. **22.** Obujam kvadra kojem duljine bridova a , b i c zadovoljavaju jednakosti $a \cdot b = 6720$, $a \cdot c = 11520$, $b \cdot c = 5376$. **24.** Najveći broj sastavljen od pet različitih neparnih znamenki i djeljiv s 5. **25.** $(0.4 - 0.04 + 0.004 - 0.0004) : 0.00004 - 2001$.

Okomito: **1.** MMMDXLIX. **2.** Najveći prosti djelitelj broja 264693. **3.** Brzina automobila u km/sat koji za 3 minute prevali put od 4000 metara. **4.** Broj od kojeg 35 posto iznosi 9079. **5.** $14^2 - 13^2 + 12^2 - 11^2$. **6.** $V(377, 551)$. **7.** Opseg jednakostraničnog trokuta kojem je duljina stranice rješenje jednadžbe $\frac{x+45}{x-55} = 2$. **8.** Zbroj prvih sedam neparnih prirodnih brojeva. **10.** Opseg kvadrata kojem je površina jednaka 1936. **14.** Vrijednost iz-

raza $ab(c+1)(c-1) + 4(a+b+c) - 3$ za $a = 9$, $b = 17$, $c = 13$. **15.** Zbroj obujmova kocki s duljinama bridova 7, 11, 12, 13 i 14. **16.** Umnožak najmanjeg prostog broja i najvećeg dvoznamenkastog prostog broja. **17.** $15^3 - 13^3 + 11^3 - 10^3$. **18.** $9 \cdot 9 \cdot 9 - 9 \cdot 8$. **20.** Kamate koje za godinu dana donosi glavnica od 4000 kuna uz kamatnu stopu 10.7%. **21.** $D(2233, 56, 55)$. **22.** Broj dijagonala triaesterokuta. **23.** Broj prostih brojeva manjih od 30.

Napomene. U lik križaljke upisuju se rješenja 33 zadatka (15 vodoravno i 18 okomito).

Zbog nešto većeg broja zadataka najbolji način rješavanja je primjena grupnog rada.

Matematička križaljka ovog tipa pogodna je i u prvom razredu srednje škole na početku školske godine za provjeru znanja osnovnoškolske matematike.

5. Zaključne napomene

Matematička križaljka može biti manja ili veća, jednostavnija ili složenija, lakša ili teža, ovisno o njezinoj ulozi u nastavnom procesu. U mnogim slučajevima rješavanje matematičke križaljke može olakšati i ubrzati primjena džepnog računala.

U nekim osnovnim školama učenici su se susreli s matematičkim križaljka na nastavnim satima i pokazali velik interes za rješavanje zadataka na ovaj način.

U metodičkim radionicama nastavnici matematike također su pokazali velik interes za uvođenje ovog oblika rada u nastavu matematike.

Nastavnici matematike koji još nisu pobliže upoznali ovaj način provjeravanja znanja učenika, mogu to učiniti rješavajući matematičke križaljke u ovom članku.

Treba pokušati s tim oblikom rada u razredu kako bi se steklo vlastito iskustvo. Vlastito iskustvo je najdragocijenije.