Heuristička nastava

Metodika

Zdravko Kurnik, *Zagreb*

1. Uvod

U postavkama i ciljevima HNOS-a možemo kao prioritete unapređenja odgojno-obrazovnog procesa i poučavanja pročitati i sljedeće sintagme: **samostalan rad učenika**, **stvaralački rad**, **uvođenje učenika u istraživačku nastavu**, **razvijanje sposobnosti za rješavanje problema**, **suvremene nastavne metode** i dr. Očito su osnovne smjernice za osuvremenjivanje nastave pobuđivanje i pokretanje mišljenja učenika i nastojanje da dobar dio novih znanja stječu vlastitim snagama i sposobnostima.

Velik dio postavki i ciljeva suvremene nastave matematike može se ostvariti primjerenim izborom nastavnih oblika i nastavnih metoda. Jedna od osobina kreativnog nastavnika matematike jest upravo ovladavanje tim umijećem. Zato je potrebno preispitati uporabu svih oblika rada i nastavnih metoda i zadržati samo one koji ne sputavaju učenike. Potrebna je i češća izmjena oblika rada i nastavnih metoda.

Matematika u nastajanju je **konkretna** i **induktivna** znanost, a sama matematika je **apstraktna** i **deduktivna** znanost. Ta činjenica govori sve o tome koliko su i za nastavu matematike važne neke znanstvene metode istraživanja. Kreativan nastavnik, birajući pogodne probleme i primjenjujući te metode, može učenike osposobiti za rad koji je vrlo blizak **istraživačkom radu**. Učenike treba postupno i primjereno naučiti **analizirati, sintetizirati, konkretizirati, apstrahirati, inducirati, deducirati, generalizirati, specijalizirati i uočavati analogije,** bez obzira hoće li se oni kasnije ozbiljnije baviti matematikom ili ne. Matematički način mišljenja dragocjena je stečevina matematičkog obrazovanja, primjenjiva i u mnogim drugim djelatnostima.

Koji su nastavni sustavi najpogodniji za ostvarenje nabrojenih ciljeva? Za nastavu matematike, a posebno za razvijanje sposobnosti učenika za rješavanje problema, prirodno se izdvajaju dva sustava: **problemska nastava** i **heuristička nastava**.

2. Kratko o problemskoj nastavi

Osnovu za primjenu problemske nastave daju tri važna pojma: problem, problemska situacija i načelo problemnosti. Ti su pojmovi opisani u [2].

Problemska nastava je suvremen, viši nastavni sustav. Ta činjenica odmah upozorava da je i učenicima i nastavnicima matematike teži od drugih nastavnih sustava.

Učenicima je težak zato što samostalno rješavanje problema nije ni jednostavno, ni lako. To se najbolje vidi na matematičkim natjecanjima gdje se često ni naši najbolji učenici dobro ne snalaze u rješavanju nestandardnih i problemskih zadataka.

Prva je bitna pretpostavka za uspješnu primjenu problemske nastave da su učenici primjereno osposobljeni za **umni rad** (pravilan izbor izvora za proučavanje i izdvajanje potrebnih teorijskih činjenica, misaono prerađivanje, postavljanje i provjeravanje hipoteza, jezično oblikovanje i zapis rezultata rada i dr.). Sposobnost umnog rada razvija se postupno. Najpovoljniji se razvoj postiže upravo u problemskoj nastavi. Zato tu nastavu treba nastojati primjenjivati na svim razinama matematičkog obrazovanja, uvažavajući pritom dob, psihički razvoj i stvarne matematičke sposobnosti učenika.

Iako se poučavanje nastavnika matematike u problemskoj nastavi znatno smanjuje, ovaj nastavni sustav relativno je težak i za nastavnika. Uloga nastavnika u njemu sastoji se u savjetovanju i pomaganju učenika pri izboru izvora, ukazivanju na potrebne teorijske činjenice i završnoj raspravi o rezultatima samostalnog rada učenika. Tu se mogu pojaviti i postavke učenika koje nastavnik nije predvidio. Na takvu situaciju on mora biti pripravan. Štoviše, on mora biti sposoban stvarati takve situacije. Zato je druga bitna pretpostavka za primjenu problemske nastave **dobra osposobljenost** nastavnika matematike.

Svi matematički sadržaji nose u sebi stanovitu problemnost. Zato je pri obradi svakog matematičkog sadržaja moguće najprije stvoriti prikladnu problemsku situaciju i učenike staviti pred neki problem. Hoće li se kasnije problem u potpunosti obrađivati primjenom problemske nastave, ili će se rad kombinirati s drugim oblicima i nastavnim metodama ovisi o težini matematičkog sadržaja, uzrastu i predznanju učenika i umješnosti nastavnika. Već samo postavljanje problemske situacije dobar je početak.

Ako se već problemska nastava ne može, zbog svoje složenosti i težine, primjenjivati pri obradi dobrog dijela nastavnih sadržaja, poželjno je da nastavnik matematike učenicima, ili bar naprednijim učenicima, češće postavlja problemske zadatke i njeguje stvaranje različitih problemskih situacija.

Problemska nastava ima niz dobrih strana. Izdvajamo one najbolje: veća motiviranost učenika, primjerena mogućnost suradnje, istraživački pristup rješavanju problema, razvoj kritičkog mišljenja, bolje shvaćanje biti i zakonitosti, povećanje količine znanja, stečena znanja su trajnija, veća primjenjivost stečenih znanja.

Problemska nastava je zahtjevan nastavni sustav. Zbog složenosti i težine za njezinu primjenu treba više vremena. Zato je razumljivo da se problemska nastava ne može primjenjivati na svakom nastavnom satu, već je u tu svrhu potrebno načiniti uži i primjereniji izbor matematičkih sadržaja, a za obradu tih sadržaja i vrsnu pripremu.

Rješavanje problemskih zadataka dobar je način postupnog uvođenja problemske nastave u nastavu matematike.

3. Heuristička nastava

Kad god se problemska nastava ne može primijeniti, bilo zbog njezine težine ili zbog naravi matematičkog sadržaja koji se treba obraditi, taj nastavni sustav treba zamijeniti s nastavnim sustavom čija je djelotvornost nešto slabija, ali još uvijek dovoljno dobra za ostvarenje većine ciljeva suvremene nastave matematike. Takav sustav je heuristička nastava. Ovdje jesu aktivnost i samostalnost učenika smanjene. Međutim, sposobnost umnog rada učenika i dalje se razvija putem nastavnikovog misaonog vođenja.

Heuristika je mlada znanstvena grana. Naziv potječe od Arhimedovog uzvika HEUREKA! (pronašao sam, otkrio sam), kada je ovaj veliki Grk otkrio zakon o uzgonu tijela u tekućini.

Heuristička nastava je iznikla iz potrebe da se uvođenjem samostalnog rada učenika prevlada predavačka nastava i poboljša nastavni proces. Njezin početak nalazimo u prvom desetljeću 20. stoljeća. Ona se tijekom vremena razvijala i usavršavala. Razvojni put najbolje opisuju smjernice za njezinu primjenu iz prve polovine toga stoljeća:

- Zadržati prividnost igre. Uvažavati slobodu učenika. Podržavati privid njegovoga vlastitog otkrivanja matematičke istine.

Izbjegavati zamorne vježbe pamćenja u početnom obrazovanju učenika, jer to potiskuje njegove urođene osobine. Poučavati oslanjajući se na interes prema matematičkom sadržaju koji se proučava.

- Ne izlagati određeni dio matematike u potpuno gotovom obliku. Takvim se postupanjem dolazi u raskorak s osnovnim načelima nastave. Razvijati umni rad, a ne zahtijevati učenje napamet. Pridržavati se načela primjerenih teškoća.
- Razvijanje stvaralačkih sposobnosti učenika glavni je zadatak nastave matematike.
- Heuristička metoda je takva nastavna metoda u kojoj nastavnik ne priopćuje učenicima gotove činjenice i istine, nego ih navodi na samostalno otkrivanje odgovarajućih tvrdnji i pravila.
- Heuristička metoda sastoji se u tome da nastavnik pred razred postavlja problem, a onda pomoću odgovarajućih prikladnih pitanja vodi učenike do rješenja.

* * *

Uloga heurističkog procesa u nastavi matematike iscrpno je osvijetljena u knjigama američkog matematičara i metodičara Georga Polye. U knjizi *Kako riješiti matematički zadatak* (1945.) Polya pokušava okarakterizirati heuristiku kao posebnu granu spoznavanja. Cilj je heuristike istražiti pravila i metode koje vode do pronalaska i otkrića.

Mnoge gore navedene smjernice i promišljanja ostali su svježi i prepoznatljivi sve do danas.

4. Karakteristike heurističke nastave

Heuristička nastava kao i svaki drugi nastavni sustav ima svoje dobre i slabe strane. Pozitivna je činjenica da dobre strane prevladavaju i heurističku nastavu svrstavaju među više i suvremene nastavne sustave.

Dobre strane:

1) Osnovu za stjecanje znanja i sposobnosti predstavljaju samostalni rad i aktivnost učenika. Pritom je važno nastavnikovo poučavanje o matematičkom sadržaju i načinu rada kao svojevrsna pomoć učenicima.
2) Poznato je da obrazovno značenje imaju samo oni matematički sadržaji koje učenici potpuno razumiju. Ono što učenici ne razumiju brzo se zaboravlja i potpuni je obrazovni promašaj. Zato je bitna odrednica heurističke nastave da nastavnici svojim poučavanjem učenike misaono vode i dovode ih do razumijevanja i shvaćanja matematičkog sadržaja.
3) Heuristička nastava pretpostavlja neposredno komuniciranje nastavnika i učenika. Nastavnik svojim pitanjima upućuje učenike da u izvorima nalaze činjenice na osnovu kojih nastavnikovim misaonim vođenjem dolaze do shvaćanja poopćenja. Slobodan razgovor i rasprava omogućavaju učenicima postavljanje pitanja i to posebno kad im nedostaje neka spoznajna informacija.
4) Iako heuristička nastava, za razliku od problemske nastave, ne dovodi još učenike do potpuno samostalnog rada u otkrivanju matematičkih istina, već do toga spoznavanja učenike vodi nastavnik na temelju svoga heurističkog modela, učenici su ipak misaono aktivni i u određenoj mjeri subjekti nastave. Heuristička nastava mora dovesti učenike do shvaćanja.

Slabe strane:

1) Nemogućnost misaonog vođenja baš svih učenika zbog pomanjkanja vremena i različitih brzina shvaćanja.
2) Nemogućnost neposredne komunikacije sa svim učenicima.
3) Komunikacija s povučenim učenicima je otežana i često izostaju njihova pitanja.
4) Nepotpuna povratna informacija o proučenom matematičkom sadržaju.

5. Primjeri

Heuristička nastava, za razliku od problemske nastave, može se u potpunosti ili djelomično primijeniti na svakom nastavnom satu matematike. Sve ovisi o nastavniku i umješnosti njegovog vođenja.

Za ilustraciju primjene heurističke nastave izabrali smo nekoliko matematičkih sadržaja koje je lako raščlaniti na korake i gdje ona dolazi do punog izražaja.

♢ **Djeljivost prirodnih brojeva s 9.** Tema je pogodna za primjenu heurističke nastave jer je prije toga obrađena tema **Djeljivost prirodnih bojeva s 3**, pa je postupak istraživanja poznat i lako se uspostavlja problemska situacija. Nastavnik u uvodnom dijelu kroz razgovor podsjeća učenike na taj postupak. Slijede koraci.

1) Promatranje višekratnika broja 9 manjih od 200 i zbrojeva njihovih znamenaka. Višekratnici su brojevi 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, 189, 198, a zbrojevi njihovih znamenaka su 9 ili 18. Učenici uočavaju da su zbrojevi znamenaka višekratnici broja 9, tj. brojevi djeljivi s 9!

Prva tvrdnja:
Ako je prirodni broj djeljiv s 9, *onda je i zbroj njegovih znamenaka djeljiv s* 9.

2) Promatranje prirodnih brojeva 2 007, 18 999, 456 237, 987 654 321 čiji su zbrojevi znamenaka 9, 36, 27, 45 višekratnici broja 9. Provjera dijeljenjem pokazuje da su i promatrani brojevi djeljivi s 9.

Druga tvrdnja:
Ako je zbroj znamenaka prirodnog broja djeljiv s 9, *onda je i taj prirodni broj djeljiv s* 9.

Ova obratna tvrdnja omogućuje brže ispitivanje djeljivosti prirodnih brojeva s 9, nego što se to može postići dijeljenjem. To je osobito važno kod velikih brojeva. Međutim, u tim slučajevima može se primijeniti džepno računalo!

♢ **Zbroj kutova u mnogokutu.** Obrada ove nastavne jedinice u sedmom razredu osnovne škole temelji se na nizu jednostavnih induktivnih zaključivanja. Zato nastavnik matematike može na prirodan način raščlaniti nastavnu jedinicu na korake i osmisliti heuristički pristup njezine obrade. Otkrivanje kreće od ranije spoznatih činjenica.

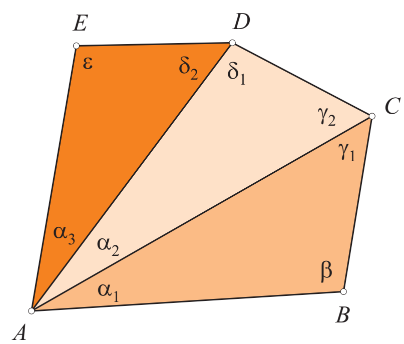
1) Predznanje učenika. Nastavnik podsjeća učenike na njihovo znanje o trokutu i četverokutu.

Prva od tih činjenica je izreka o zbroju svih unutarnjih kutova trokuta. Za taj zbroj K_3 vrijedi jednakost $K_3 = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Druga činjenica je izreka da je zbroj K_4 svih unutarnjih kutova četverokuta jednak 360°, $K_4 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ = 2 \cdot 180^\circ$. Druga činjenica se dobila povlačenjem jedne dijagonale četverokuta.

2) Nastavak induktivnog postupka: peterokut. Nastavnik usmjeruje mišljenje učenika na sljedeći mnogokut i upućuje ih na povlačenje njegovih dijagonala iz jednog vrha.

Sljedeći mnogokut je peterokut $ABCDE$ s unutarnjim kutovima α, β, γ, δ i ε. Njegove dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ iz vrha A dijele kut α na tri dijela α_1, α_2 i α_3, kut γ na dva dijela γ_1 i γ_2, kut δ na dva dijela δ_1 i δ_2, a peterokut $ABCDE$ na tri trokuta ABC, ACD i ADE. Zbrojevi unutarnjih kutova u tim trokutima jednaki su redom $\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180^\circ$, $\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_1 = 180^\circ$, $\alpha_3 + \delta_2 + \varepsilon = 180^\circ$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobiva se $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2) + \varepsilon = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ$, pa je $K_5 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ = 3 \cdot 180^\circ$.



3) Analogija: šesterokut, sedmerokut itd. Sada se vodi razgovor o sljedećim mnogokutima i otkriva određena zakonitost među dobivenim jednakostima. Šesterokut se s tri dijagonale iz jednog vrha podijeli na četiri trokuta, pa je $K_6 = 4 \cdot 180^\circ$, za sedmerokut je $K_7 = 5 \cdot 180^\circ$ itd.

4) Generalizacija. Razmatrani niz induktivnih zaključivanja vodi mišljenje učenika na iskazivanje sljedeće opće izreke, generalizacije:

Zbroj K_n svih unutarnjih kutova mnogokuta s n stranica dan je formulom

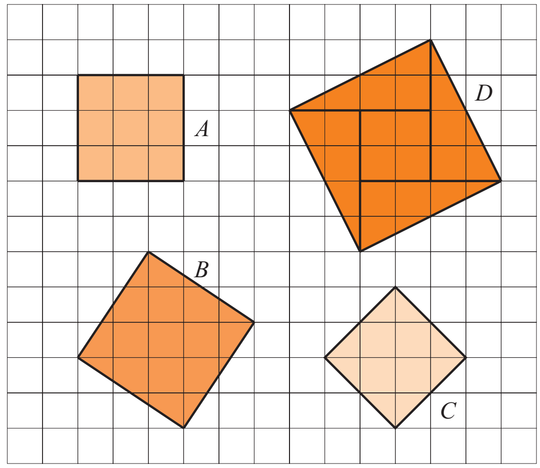
$$K_n = (n-2) \cdot 180^\circ .$$

Dokaz ove izreke zasniva se na činjenici da se iz jednog vrha n-terokuta mogu povući $n-3$ dijagonale koje taj lik dijele na $n-2$ trokuta.

♢ **Pitagorin poučak.** Tradicionalna obrada ove teme ima jedan izraziti metodički nedostatak: počinje najčešće tako da se odmah na početku iskaže svojstvo duljina a, b i c stranica pravokutnog trokuta u obliku Pitagorina poučka $c^2 = a^2 + b^2$. Nerijetko manjka i dokaz, već se brzo prelazi na primjenu poučka na razne geometrijske likove. To nije pogrešno, i na taj način učenici će usvojiti poučak, postat će njihovo trajno znanje, pogotovo što će ih Pitagorin poučak "pratiti" tijekom daljnjeg školovanja. Međutim, u ovakvoj obradi zapostavljen je postupak otkrivanja.

Za heurističko otkriće Pitagorina teorema dovoljna su samo dva koraka. Nakon kratkog nastavnikovog uvođenja u problemsku situaciju, svaki korak omogućuje samostalni rad učenika. Možemo još dodati da su oba koraka vrlo pogodna za primjenu još jedne korisne metode u nastavi matematike u osnovnoj školi — metode demonstracije. Evo tih koraka:

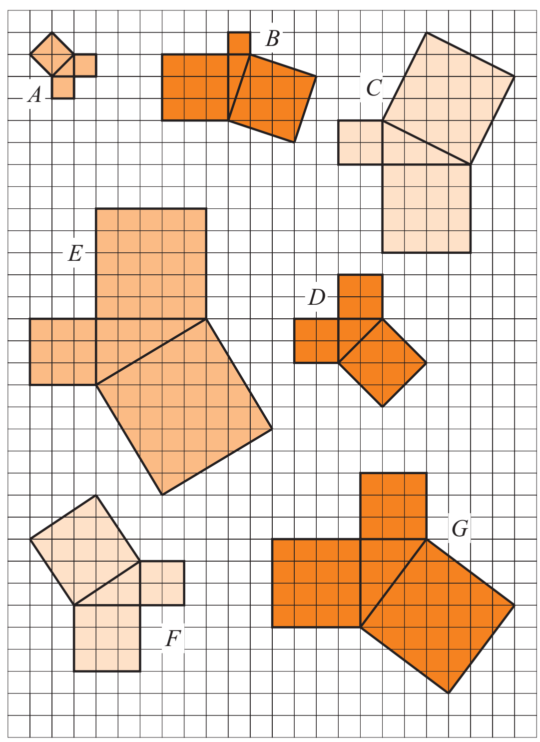
1) Izračunavanje površina kvadrata u kvadratnoj mreži. Vrhovi nekog kvadrata postavljaju se u čvorišta kvadratne mreže, kvadrat se dijeli na trokute i manje kvadrate kojima se, prebrojavanjem jediničnih kvadratića, površine lako izračunavaju.



KVADRAT	A	B	C	D			
POVRŠINA				20			

Tablica površina

2) Proučavanje različitih Pitagorinih figura u kvadratnoj mreži i sastavljanje tablice s vrijednostima a^2, b^2, c^2. Kratak prikaz ovog koraka vidite na donjem crtežu.



	A	B	C	D	E	F	G	H			
a^2							9				
b^2							16				
c^2							25				

Tablica kvadrata

Nakon popunjavanja tablice lako se uočava veza među kvadratima i iskazuje Pitagorin poučak:

Zbroj kvadrata duljina kateta a i b svakog pravokutnog trokuta jednak je kvadratu duljine hipotenuze c, tj.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

♢ **Vièteove formule.** Nastavnik najprije upoznaje učenike s teorijskim činjenicama potrebnim za obradu ovog pitanja. Podsjeća ih na formule za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Svaka formula izražava vezu jednog od rješenja kvadratne jednadžbe pomoću svih njezinih koeficijenata a, b i c. No, postoje i veze oba rješenja x_1 i x_2 s nekim od koeficijenata a, b i c. Nastavnik uspostavlja problemsku situaciju upućujući učenike da sami otkriju takve veze za zbroj $x_1 + x_2$ i umnožak x_1x_2 rješenja kvadratne jednadžbe. Sada su učenicima koraci rada sasvim jasni.

1) Izvod prve formule. Od učenika se može očekivati sljedeći samostalni rad:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\qquad + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

2) Izvod druge formule. Do rezultata se može doći neposrednim množenjem rješenja, ali nastavnik može učenicima pomoći i ukazati im na mogućnost pojednostavljenja množenja primjenom razlike kvadrata. U tom slučaju od učenika se može očekivati sljedeći samostalni rad:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

3) Vièteov poučak. Nakon kratkog razgovora nastavnika s učenicima učenici daju sljedeću formulaciju:

Ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, onda vrijede jednakosti

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

* * *

Na kraju, samo jedna preporuka: pružite učenicima mogućnost da samostalno rade i otkrivaju matematičke istine da biste što češće od njih čuli uzvik zadovoljstva: HEUREKA!

Literatura

[1] V. Kadum, *Učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi matematike*, "IGSA", Pula, 2005.

[2] Z. Kurnik, *Načelo problemnosti*, Matematika i škola 14 (2002), 148-152.

[3] Z. Kurnik, *Problemska nastava*, Matematika i škola 15 (2002), 196-202.

[4] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prijevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[5] G. Polya, *Matematičko otkriće* (prijevod s engleskog), HMD, Zagreb, 2003.