Uvodimo zamjenu

Iz razreda

Branimir Dakić, *Zagreb*

Uvođenje izvjesne zamjene ili pokrate kako bi se došlo do jednostavnijeg zapisa a time i do dostupnijeg i lakše rješivog zadatka, vrlo je čest postupak u matematici. Tako ćemo primjerice rješavajući sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-y} + \frac{6}{x+y} &= 1.1 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{9}{x+y} &= 0.1 \end{aligned}$$

uvesti zamjene (*nove nepoznanice*) $u = \dfrac{2}{x-y}$, $v = \dfrac{3}{x+y}$, i tako dobiti jednostavan sustav

$$\begin{aligned} u + 2v &= 1.1 \\ 2u + 3v &= 0.1 \end{aligned}$$

kojega je lako riješiti, odrediti nepoznanice u i v te potom i x i y.

Rješavanje sličnih sustava jednadžbi na ovaj način vrlo je uobičajeno i poklanja mu se osobita pozornost. Slično je s raznim supstitucijama pri rješavanju nekih složenijih algebarskih jednadžbi čime se jednadžbe prevode na jednadžbe nižega stupnja. Tako ćemo rješavajući jednadžbu

$$\frac{1}{x^2 - x - 1} + 3 = 2x^2 - 2x,$$

(valja uočiti kako se radi o jednadžbi četvrtog stupnja) uvesti zamjenu $u = x^2 - x - 1$, i time dobiti kvadratnu jednadžbu $2u^2 - u - 1 = 0$. Potom je lako rješavanje zadatka privesti kraju.

Kod rješavanja simetričnih algebarskih jednadžbi višeg stupnja postupak uvođenja zamjene je pravilo kojem se posvećuje i opće razmatranje. Umjesto izlaganja o tom pravilu pokažimo ga samo kao još jedan primjer. Riješimo simetričnu jednadžbu

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Zadanu jednadžbu najprije dijelimo s x^2, (x=0 nije rješenje jednadžbe) te imamo jednadžbu

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Uvodimo zamjenu $u = x + \dfrac{1}{x}$. Onda je $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$, pa nakon toga dobivamo jednostavnu kvadratnu jednadžbu

$$u^2 + 2u - 8 = 0,$$

koju je lako riješiti. Lako je onda naći i rješenja zadane jednadžbe.

Zamjene koje uvodimo moraju imati smisla, moraju biti svrhovite, uvjerljive, prije svega djelotvorne. Pitanje je primjerice imaju li smisla zamjene u jednadžbama kao što su $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$, $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ ili $2\log^2 x + \log x - 1 = 0$. Naime to su jednostavne kvadratne jednadžbe s nepoznanicama x^2, $\sin x$, odnosno $\log x$. Pa ipak nerijetko se i u ovakvim zadacima uvode nove nepoznanice.

Sve su to standardne primjene, kako najčešće kažemo **metode supstitucije**. Ali ponekad se uvođenjem novih oznaka *otvore oči* i njihova uloga postaje više didaktička. Navest ćemo i ovom prigodom nekoliko vrlo lijepih i ilustrativnih primjera.

Zadatak 1. Bez uporabe tablica i računala dokažimo nejednakost

$$\sqrt[5]{2} + 7 < 8 \cdot \sqrt[10]{2}.$$

Valja uočiti kako je zapravo riječ o tvrdnji da je vrijednost polinoma drugog stupnja $f(x) = x^2 - 8x + 7$ manja od nule za $x = \sqrt[10]{2}$, tj. da je

$$f(\sqrt[10]{2}) = \sqrt[5]{2} - 8 \cdot \sqrt[10]{2} + 7 < 0.$$

No dovoljno je pokazati kako je $f(x) < 0$ za svaki realni broj x, $x \in \langle 1, 7\rangle$, a kako je $\sqrt[10]{2} \in \langle 1, 7\rangle$, čime će dana nejednakost biti dokazana.

Premda ovdje zamjena nije izravno primijenjena, ipak je na neki način sadržana u rješavanju, a sadržana je i u prepoznavanju mjesta kvadratne funkcije i njezine uloge.

Zadatak 2. Skratimo razlomak

$$\frac{49^n + 2 \cdot 35^n - 8 \cdot 25^n}{49^n + 5 \cdot 35^n + 4 \cdot 25^n}.$$

Zadatak se ne čini jednostavnim, no ako uvedemo zamjene $a = 7^n$ te $b = 5^n$, isti ćemo razlomak moći zapisati u obliku $\dfrac{a^2 + 2ab - 8b^2}{a^2 + 5ab + 4b^2}$.

Nadalje, taj razlomak možemo zapisati kao $\dfrac{(a + 4b)(a - 2b)}{(a + 4b)(a + b)}$, a nakon kraćenja (primijetimo da je $a + 4b \neq 0$) dobivamo jednostavan razlomak $\dfrac{a - 2b}{a + b}$.

Tako je konačno rješenje zadatka $\dfrac{7^n - 2 \cdot 5^n}{7^n + 5^n}$.

A kad je riječ o složenim algebarskim izrazima, čiji je primjer dan i u prethodnom zadatku, uvijek se pitamo koliko njihovo rješavanje uopće ima smisla. Ako ih već i postavljamo, onda u njihovu rješavanju treba težiti nekom svrhovitom cilju. Njihova odgojna vrijednost mogla bi se naći baš u ovakvim prepoznavanjima, odnosno u globalnom pogledu na njih same.

U tom je smislu možda i uvjerljiviji sljedeći primjer:

Zadatak 3. Pojednostavnimo

$$\left(\frac{2 \cdot 25^n + 5^n}{125^n - 1} - \frac{5^n + 1}{25^n + 5^n + 1}\right) \left(1 + \frac{5^n + 1}{5^n} - \frac{25^n + 5^{n+1}}{25^n + 5^n}\right) \cdot \frac{5^n + 1}{5^n - 1}.$$

Riječ je o već jednom rješavanom zadatku uz famozne *algebarske razlomke*. Stavljajući $a = 5^n$ zapis poprima oblik:

$$\left(\frac{2a^2 + a}{a^3 - 1} - \frac{a + 1}{a^2 + a + 1}\right) \left(1 + \frac{a + 1}{a} - \frac{a^2 + 5a}{a^2 + a}\right) \cdot \frac{a + 1}{a - 1}.$$

Radi se dakle o raspoznavanju izvjesnih algebarskih oblika, odnosno o razumijevanju i pojma i operacija s potencijama.

Ovakvi su primjeri u našim knjigama brojni i kad ih se već ne odričemo, promijenimo smisao njihova rješavanja.

Zadatak 4. Pojednostavnimo

$$\left(\frac{c - ab}{a - b}\right)^2 + \left(d - \frac{c - ab}{a - b}\right) \cdot \left(d + \frac{c - ab}{a - b}\right).$$

Uz zamjenu $\dfrac{c - ab}{a - b} = x$, izraz poprima sasvim jednostavan oblik:

$$x^2 + (d - x)(d + x) = x^2 + d^2 - x^2 = d^2.$$

Zadatak 5. Pojednostavni

$$\left(\sqrt[3]{\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2} - 1\right) \left(\sqrt[3]{\frac{a + b}{a - b}} + \sqrt[3]{\frac{a - b}{a + b}}\right).$$

Zamjenom $\sqrt[3]{\dfrac{a + b}{a - b}} = u$, dani algebarski izraz poprima oblik

$$\left(u^2 + \frac{1}{u^2} - 1\right) \cdot \left(u + \frac{1}{u}\right) = u^3 + \frac{1}{u^3},$$

te je konačni rezultat

$$\frac{a + b}{a - b} + \frac{a - b}{a + b} = 2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

I na kraju: Prisjetimo se kako je u trigonometriji III. razreda srednje škole tzv. *univerzalna zamjena* standardni postupak kojim se trigonometrijski izrazi, jednadžbe ili nejednadžbe prevode na ekvivalentne algebarske. Prisjetimo se, to su zamjene

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Zadatak 6. Riješimo jednadžbu

$$\cos 2x+\sin 2x=-1.$$

Rješavajući na uobičajen način, imamo redom

$$\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x=-1,$$

$$2\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x=0,$$

$$2\cos x\,(\cos x+\sin x)=0.$$

I sada slijede rješenja:

(1) $\cos x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}-k\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z}$

(2) $\operatorname{tg}x=-1,\ x=\dfrac{3\pi}{4}+n\cdot\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$

Rješenje *univerzalnim zamjenama* bi izgledalo ovako:

Uz $\operatorname{tg}x=t$ jednadžbu zapisujemo u obliku algebarske jednadžbe

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}=-1,$$

čije je jedino realno rješenje $t=-1$.

Dakle $\operatorname{tg}x=t=-1$, odakle dobijemo rješenje $x=\dfrac{3\pi}{4}+n\cdot\pi,\ n\in\mathbf{Z}$.

Gdje je nestalo drugo rješenje, ono koje smo dobili uz ovo, rješavajući istu jednadžbu prvim postupkom?

Odgovor je na samom početku, već pri uvođenju zamjene $\operatorname{tg}x=t$. Ta zamjena ima smisla za sve x za koje je definiran $\operatorname{tg}x$, odnosno za koje je $\cos x=0$, odnosno za $x=(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

A jedno od rješenja zadane jednadžbe je upravo skup tih brojeva x. Stoga se ponekad uporabom *univerzalne supstitucije* mijenja područje definicije funkcije, što se odražava i na rješavanje odgovarajuće trigonometrijske jednadžbe. U takvim zadacima zato na samom početku treba provjeriti ima li supstitucija utjecaja na kasniji rezultat zadatka.

100 000 DECIMALA BROJA π NAPAMET!

Akira Haragući, 60-godišnji Japanac, u srijedu 4. listopada ove godine u 1 h 28 min ujutro završio je s *recitiranjem* napamet 100 000 decimala broja π, što je novi rekord za Guinnessovu knjigu rekorda. Raniji je rekorder bio također Japanac Hirojuki Goto. On je pak 1995. napamet izrecitirao 42 195 decimala broja π. Iste, 1995. godine rekord je postavio i Haragući (83 431 decimala) ali on nije zabilježen u Guinnessovoj knjizi.

Haragući je poslovni čovjek, savjetnik u jednoj agenciji za mentalno zdravlje u gradu Mobara. Njegov je *recital* trajao 16 sati. Počeo je u utorak u 9 sati ujutro. Svakih sat ili dva Haragući je uzimao petminutnu stanku kako bi se osvježio i pojeo malo riže. Na svakom su ga koraku pratile video kamere kako bi se otklonila svaka dvojba, a nadzor je provodilo posebno povjerenstvo. Video snimka je dokaz kako je sve bilo korektno.

"Ono što sam želio nije samo memoriranje brojki. Od svega sam pokušao napraviti pravi triler," izjavio je kasnije Haragući.

Usput, u nadmetanju za određivanje što više decimala broja π trenutno je rekorder također Japanac, već legendarni Kanada, kojemu je taj posao životna opsesija. Njegov rekord postignut je na superračunalu Tokijskog sveučilišta 2002. godine i iznosi 1.24 bilijuna decimala.