Heuristički razgovor

Metodika

Zdravko Kurnik, *Zagreb*

Velik dio postavki i ciljeva suvremene nastave matematike može se ostvariti primjerenim izborom nastavnih oblika i nastavnih metoda te njihovom češćom izmjenom. Jedna od osobina kreativnog nastavnika matematike jest upravo ovladavanje tim umijećem. Ovdje ćemo upoznati jedan takav postupak izmjene.

U opisu heurističke nastave u [4] istaknuli smo da ona nije toliko zahtjevan nastavni sustav kao problemska nastava. U njoj su aktivnost i samostalnost učenika smanjene, pa je njezina djelotvornost nešto slabija, ali je još uvijek dovoljno dobra za ostvarenje većine ciljeva suvremene nastave matematike. Posebno razvijanja sposobnosti umnog rada učenika.

S druge strane ne treba zanemariti ni slabe strane heurističke nastave: nemogućnost misaonog vođenja baš svih učenika zbog pomanjkanja vremena i različitih brzina shvaćanja, nemogućnost neposredne komunikacije sa svim učenicima, komunikacija s povučenim učenicima je otežana i često izostaju njihova pitanja, nepotpuna povratna informacija o proučenom matematičkom sadržaju. Tome treba dodati i činjenicu iz iskustva primjene heurističke nastave da nije lako dovesti *sve* učenike do samostalnog otkrivanja odgovarajućih tvrdnji i pravila. Do *heureke*! Za neke učenike heuristička nastava ostaje još uvijek složeniji i teži nastavni sustav.

Zato ne čudi da se mnogi naši nastavnici matematike drže prokušanih tradicionalnih nastavnih metoda. U nastavnom procesu najčešće primjenjuju metodu razgovora. Ta metoda je dobra, ali je slabije djelotvorna od heurističke metode. Razlog leži i u njezinoj neprimjerenoj primjeni. Evo uočenih slabosti: nema postupnog otkrivanja novog, nastavnik kroz razgovor izlaže određeni matematički sadržaj u potpuno gotovom obliku, razgovor vodi samo s nekim učenicima, obično s najboljim, pasivnost mnogih učenika, pitanja nisu dobro pripremljena.

Metodu razgovora treba osuvremeniti. To se postiže zadržavanjem svih dobrih strana metode razgovora i dodavanjem dobrih strana heurističke metode. Tako se dobiva jedna metoda koja po svojim karakteristikama stoji između metode razgovora i heurističke metode. Ta se metoda naziva **heuristički razgovor**. Ovom metodom dolazi se do novih matematičkih istina otkrivanjem kroz razgovor nastavnika i svih učenika, ali uz pojačano nastavnikovo misaono vođenje. Za dobro vođenje heurističkog razgovora osnovni je preduvjet vrsna nastavnikova priprema, posebno priprema pitanja za pojedine dijelove matematičkih sadržaja (pitanja koja se odnose na razumijevanje zadatka, pitanja koja se odnose na rješavanje zadatka, pitanja koja se odnose na postavljanje jednadžbi, pitanja u vezi s poučkom i njegovim dokazom).

* * *

Za ilustraciju su odabrana dva karakteristična primjera.

Opisat ćemo najprije primjenu heurističkog razgovora pri obradi novog gradiva.

U poglavlju **Mnogokuti** u sedmom razredu osnovne škole ima nekoliko nastavnih jedinica koje su vrlo pogodne za tu primjenu. Evo nekih od naslova: Broj dijagonala mnogokuta, Zbroj kutova mnogokuta, Pravilni mnogokuti, Opseg i površina mnogokuta.

Za obradu smo odabrali prvi naslov.

Primjer 1. Broj dijagonala mnogokuta.

Ciljevi ove nastavne jedinice su: uvođenje pojma dijagonale mnogokuta, određivanje broja svih dijagonala iz jednog vrha mnogokuta i otkrivanje formule za broj svih dijagonala mnogokuta. Krenimo redom.

◇ *Pojam dijagonale mnogokuta.*

Nastavnik: Podsjetimo se što znamo o mnogokutima. Opišite mi pojmove: mnogokut, vrhovi mnogokuta, susjedni vrhovi mnogokuta, stranice mnogokuta i n-terokut.

Učenici: Neka je $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ niz od n točaka u ravnini od kojih nikoje tri uzastopne točke ne pripadaju istom pravcu. Ako se dužine $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ međusobno ne presijecaju, onda se dio ravnine koji one omeđuju naziva mnogokut i označava sa $A_1A_2A_3 \ldots A_n$.

Točke $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ zovu se vrhovi mnogokuta.

Parovi A_1, A_2; A_2, A_3; $\ldots$; A_{n-1}, A_n; A_n, A_1 zovu se susjedni vrhovi mnogokuta.

Dužine $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ kojima su krajevi susjedni vrhovi mnogokuta zovu se stranice mnogokuta.

Mnogokut koji ima n stranica zove se n-terokut.

N: Vrlo lijepo i pregledno! Uočite da smo do sada u mnogokutu spajali samo susjedne vrhove. Što je s nesusjednim vrhovima? I oni su krajevi nekih dužina. Kako su se u četverokutu zvale takve dužine?

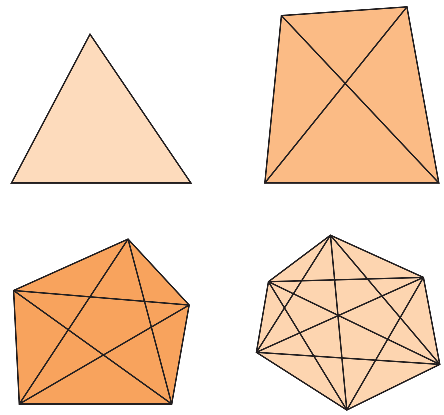
U: Dijagonale četverokuta.

N: Točno. Prirodno je da pojam dijagonale uvedemo i za mnogokut. Kako bi glasila definicija dijagonale mnogokuta?

U: Dužina kojoj su krajevi nesusjedni vrhovi mnogokuta zove se *dijagonala mnogokuta*.

N: Odlično! Zapišite tu definiciju. Zatim nacrtajte trokut, četverokut, peterokut i šesterokut i sve njihove dijagonale. Koliko dijagonala ima svaki od tih likova?

U:



Trokut nema nesusjednih vrhova, pa nema ni dijagonala.

Četverokut ima dvije dijagonale.

Peterokut ima pet dijagonala.

Šesterokut ima devet dijagonala.

N: A koliko dijagonala ima mnogokut sa 100 vrhova?

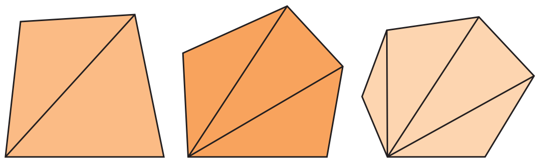
U: (šutnja).

N: Da, na ovo pitanje nije lako odgovoriti. Ni crtež nam ne bi puno pomogao. Zato najbolje da potražimo formulu pomoću koje ćemo moći izračunati taj broj. Razmotrimo najprije jedan pomoćni korak.

◇ *Broj svih dijagonala iz jednog vrha mnogokuta.*

N: Nacrtajte ponovo četverokut, peterokut i šestrokut i povucite sve dijagonale tih mnogokuta iz jednog vrha.

U:



U četverokutu se iz jednog vrha može povući jedna dijagonala, u peterokutu dvije, a u šesterokutu tri.

N: Uočite brojeve 4 i 1, 5 i 2, 6 i 3. Ovi su brojevi jednostavno povezani. Otkrijte tu pravilnost, te prema njoj odredite broj dijagonala iz jednog vrha n-terokuta. Taj broj označavamo s d_n.

U: Neki vrh mnogokuta može se spojiti dijagonalama sa svim ostalim vrhovima osim s dvama susjednim. Dakle, kod spajanja treba isključiti tri vrha. U našem slučaju vrijedi $4-3=1, 5-3=2, 6-3=3$. Za n-terokut taj broj će biti $n-3$. Imamo zaključak:

Iz svakog vrha mnogokuta koji ima n vrhova može se povući $d_n = n-3$ dijagonala.

N: Dobar zaključak! Zapisali ste ga, zar ne? Preostalo nam je još samo da otkrijemo poučak o broju svih dijagonala mnogokuta. Zapisujemo treći korak:

♢ *Broj D_n svih dijagonala mnogokuta.*

N: Do sada ste vrlo uspješno promišljali. Nadam se da ćete do otkrića doći bez moje velike pomoći. Uočite samo ovu situaciju: imamo mnogokut s n vrhova. Znamo da se iz svakog vrha mnogokuta može povući $n-3$ dijagonala. Trebam li nastaviti?

U: Ne! Broj svih dijagonala mnogokuta je $n \cdot (n-3)$.

N: Prebrz zaključak! Na dobrom ste putu, ali zaključak nije točan! Vidi li netko gdje je pogreška?

U: Pa da! Kad crtamo jednu dijagonalu, onda je jedanput povlačimo iz prve krajnje točke prema drugoj, a drugi puta od druge krajnje točke prema prvoj. Svaku dijagonalu brojili smo dva puta!!

N: Tako je! Možete li sada točno formulirati poučak?

U: Poučak glasi:

Broj svih dijagonala mnogokuta koji ima n vrhova dan je formulom

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

♢ *Slijede primjeri i zadaci.*

* * *

Drugi primjer odnosi se na rješavanje problemskih zadataka. Rješavanje problemskih zadataka primjenom heurističkog razgovora dobar je način postupnog uvođenja učenika u samostalan i stvaralački rad. Ilustrirajmo to na jednom takvom zadatku.

Primjer 2. Autobus je krenuo s kolodvora mjesta M prema moru s određenim brojem putnika. Na prvom stajalištu izašla je $\frac{1}{7}$ putnika, a ušla su 4 nova. Na drugom stajalištu izašla je $\frac{1}{5}$ putnika koji su stigli do toga stajališta, a ušlo 7 novih. Na trećem stajalištu izašla je $\frac{1}{3}$ putnika, a ušao samo 1 putnik. Na četvrtom stajalištu, izlaskom ponovo $\frac{1}{3}$ putnika i ulaskom 3 nova, broj se putnika prepolovio obzirom na broj putnika na početku i svi su oni stigli u mjesto N na moru. Odredite broj putnika koji su stigli na more.

Rješenje. Nije dobro da se odmah pozove jedan učenik na ploču i krene s rješavanjem ovakvog zadatka, što je najčešći slučaj. Tada obično nastaje pasivna atmosfera: nastavnik i učenik na ploči traže put rješavanja, učenik nešto nejasno izgovara i muči se, a "prepisivači" u razredu čekaju, dok dragocjeno vrijeme nepovratno teče. Ovakav početak rješavanja zadatka metodički je promašaj.

Zadatak je lijep primjer za primjenu heurističkog razgovora. Zapravo, nastavnik matematike gotovo i nema izbora. Primjena heurističkog razgovora se sama nameće. Zato nastavnik mora u pripremi nastavnog sata imati razrađen cijeli postupak rješavanja zadatka na taj način i, što je najvažnije, točno znati koji obrazovni učinak može postići rješavanjem. Pogledajmo primjeren metodički pristup rješavanju ovog zadatka.

Nastavnik treba znati da je postavio tekstualni zadatak i da ne postoji neposredni matematički aparat za njegovo rješavanje. U dugoj formulaciji zadatka vidi se da postoji nepoznata veličina, pa se naslućuje da će to biti jednadžba. Ali nje još nema, jer tekst tek treba prevesti na matematički jezik.

Nastavnik treba znati i da ovakvi zadaci zadaju dosta teškoća učenicima. To nije teško objasniti. Svaki takav zadatak sastoji se zapravo od dva zadatka. To su:

1) sastavljanje jednadžbi prevođenjem govornog jezika na matematički jezik;
2) rješavanje jednadžbi.

Prvi od njih nije uvijek lagan, zahtijeva priličan umni napor i poznavanje postupka raščlanjivanja, što se nerijetko pretpostavlja da učenici znaju i bez objašnjenja. Tu leži jedan od uzroka neznanja učenika. Pogledajmo korake.

◇ *Prvi korak rješavanja je provjera jesu li učenici razumjeli zadatak.*

N: Kakvi su uvjeti zadatka?

U: Autobus je krenuo prema moru s određenim brojem putnika. Imao je četiri stajališta.

N: Koje se veličine razmatraju u uvjetima zadatka? Što je zadano?

U: Zadani su brojevi putnika koji su izlazili i ulazili na pojedinim stajalištima.

N: Što se traži?

U: Traži se broj putnika koji su stigli na more. Taj broj je nepoznanica, x.

N: Dobro, moglo bi biti. Ali uočavate li da zapravo nisu poznata dva broja, broj putnika koji su na početku ušli u autobus i broj putnika koji su stigli na cilj. Ako uzmemo drugi broj kako nepoznanicu, morat ćemo ići od kraja prema početku.

U: Sad vidimo! Ako je prvi broj nepoznanica x, drugi broj je jednostavno $\frac{x}{2}$.

N: Tako je! Uočili smo jedinu nepoznanicu. Zapisujemo: Neka je x broj putnika koji je krenuo iz mjesta M.

◇ *Drugi korak je sastavljanje jednadžbe za nepoznanicu x prevođenjem govornog jezika na matematički jezik. Do nje doći ćemo iz uvjeta, razmatranjem promjena broja putnika od stajališta do stajališta. Postavljanje jednadžbe izgleda ovako:*

N: Moramo postaviti jednadžbu za nepoznanicu x. Krenimo od prvog stajališta. Kako ćemo izraziti činjenicu da je na prvom stajalištu izašla $\frac{1}{7}$ putnika, a ušla su 4 nova? Koliko putnika nastavlja putovanje?

U: Broj putnika koji nastavlja putovanje je $x - \frac{1}{7}x + 4$, odnosno $\frac{6}{7}x + 4$.

N: Odlično! Sad treba izraziti činjenicu da je na drugom stajalištu izašla $\frac{1}{5}$ putnika koji su stigli do toga stajališta, a ušlo je 7 novih. Koliko putnika nastavlja putovanje?

U: Broj putnika koji nastavlja putovanje je $\frac{6}{7}x + 4\frac{1}{5}\left(\frac{6}{7}x + 4\right) + 7$. Malo sređujemo izraz. Da, broj je $\frac{24}{35}x + \frac{51}{5}$.

N: Možete li dalje sami razmotriti situacije na trećem i četvrtom stajalištu?

U: Na trećem stajalištu izašla je $\frac{1}{3}$ putnika, a ušao je 1 novi. Broj putnika koji nastavlja putovanje je $\frac{24}{35}x + \frac{51}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{24}{35}x + \frac{51}{5}\right) + 1$. (učenici sređuju izraz). Taj broj je $\frac{16}{35}x + \frac{39}{5}$.

Na četvrtom stajalištu izašla je $\frac{1}{3}$ putnika, a ušla su 3 nova. Broj putnika koji nastavlja putovanje je $\frac{16}{35}x + \frac{39}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{35}x + \frac{39}{5}\right) + 3$. Opet komplikacija! To je $\ldots \frac{32}{105}x + \frac{41}{5}$.

N: Još nema jednadžbe. Pogledajte koji dio uvjeta niste iskoristili.

U: Svi su ti putnici stigli na more, a to je polovina, polovina! Taj broj je polovina polaznog broja putnika! Otkrili smo jednadžbu! Ona glasi

$$\frac{32}{105}x + \frac{41}{5} = \frac{x}{2}.$$

◊ *Jednadžba je jednostavna. Zato završni korak učenicima neće stvarati nikakve poteškoće.*

N: Otkrili ste jednadžbu na koju se svodi naš problem. Dovršite rješavanje problema. Riješite jednadžbu.

U: Rješenje jednadžbe je $x = 42$. Na more je stigao 21 putnik.

Time je završen i zamišljeni heuristički razgovor.

* * *

Napomena. Osnovni problem u nastavnom procesu nije samo usvajanje veće količine matematičkih sadržaja, već i načini na koje se to ostvaruje i obrazovna postignuća koja doprinose primjerenom razvoju mišljenja učenika. Zato se stalno naglašava potreba češće izmjene nastavnih oblika i nastavnih metoda tijekom nastavnog procesa.

Ovdje je opisana jedna izmjena na relaciji metoda razgovora – heuristički razgovor – heuristička metoda. Ako nastavu matematike izvodimo metodom razgovora, uvijek trebamo težiti poboljšanju, a to je opisani heuristički razgovor, razgovor otkrivanja. S vremenom će razvoj mišljenja učenika dostići razinu koja omogućuje izvođenje nastave matematike primjenom heurističke metode, a možda i primjenom problemske metode.

Naravno, u svakom konkretnom slučaju nastavnik matematike treba izvoditi nastavu na način koji je primjeren predznanju njegovih učenika.

Literatura

[1] Z. Kurnik, *Descartesova metoda – problemi i jednadžbe*, Matematika i škola 1 (1999), 10–17.
[2] Z. Kurnik, *Problemska nastava*, Matematika i škola 15 (2002), 196–202.
[3] Z. Kurnik, *Jezik u nastavi matematike*, Matematika i škola 33 (2006), 99–105.
[4] Z. Kurnik, *Heuristička nastava*, Matematika i škola 34 (2006), 148–153.
[5] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prijevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb, 1956.
[6] G. Polya, *Matematičko otkriće* (prijevod s engleskog), HMD, Zagreb, 2003.

Vremenik natjecanja

Natjecanje	Datum održavanja	Vrijeme održavanja
Školsko/ općinsko*	29. siječnja 2007.	u 13 sati
Županijsko	9. ožujka 2007.	u 10 sati
Državno	2. – 5. svibnja 2007.	

* Organiziranje općinskih natjecanja prepušteno je na volju županijama, ali se moraju održati 29. siječnja 2007. Zadatke za taj stupanj natjecanja sastavlja Državno povjerenstvo. U tim općinama se školska natjecanja (ako budu potrebna), moraju samostalno organizirati prije 29. siječnja.