Posljednja znamenka

Branimir Dakić, *Zagreb*

Matematički zadaci imaju vrlo vrijedno mjesto u učenju matematike. Zbog toga im valja poklanjati primjerenu pozornost. Nizanje zadataka bez promišljanja njihovog didaktičkog cilja uglavnom je neučinkovito, a dugoročno utječe i na pad motivacije za učenje matematike. Posebice je to izraženo kod učenika koji pokazuju smisao i interes za učenje matematike i koji u matematici nalaze nešto privlačno, što neki učenici nikad ne uspijevaju spoznati.

Rješavanju matematičkih zadataka i problema treba pristupiti sustavno, s jasnom predodžbom o svrsi i cilju koji se žele postići. Pritom moramo učenicima u što većoj mjeri omogućiti i njihovo sudjelovanje u radu jer time ne samo da se potiče njihov interes i pobuđuje aktivnost, već se razvija samopouzdanje koje je vrlo bitno za učenje.

Sustavnost u rješavanju matematičkih zadataka može se očitovati na razne načine. Pritom se ne misli na sustavnost u odabiru nizova zadataka koji imaju za svrhu putem vježbanja usvajati izvjesne navike, pravila ili algoritme. Ovdje se prije svega misli na kreativnu primjenu matematičkih znanja. Možemo isti problem riješiti na više raznih načina. Možemo probleme grupirati oko izvjesne metode (primjerice, *Gaussove dosjetke ili matematičke indukcije*). A možemo unutar zadane teme varirati primjere koji će je osvijetliti s raznih strana.

* * *

U ovom članku prikazat ćemo pak raznovrstan izbor problema na jednu jasnu i jednostavnu zadanu temu: *Kako odrediti posljednju znamenku (neizravno) zadanog broja?* Temu ćemo razraditi kroz više matematičkih zadataka nastojeći da dio njih bude pristupačan i učenicima osnovne škole. Većina je zadataka preuzeta iz srednjoškolskih udžbenika matematike koji su navedeni u popisu literature.

Primjer 1. ([1] 1.1.8.) Koja je posljednja znamenka umnoška $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99$?

Rješenje. Svi brojevi u umnošku su neparni. Među njima nalazi se i nekoliko faktora koji su djeljivi s 5. Dakle, i taj je umnožak djeljiv s 5. No njegova posljednja znamenka ne može biti 0, jer među množiteljima nema parnog broja. Posljednja je znamenka 5.

Primjer 2. ([1] str. 29. zad 38.) Koja je posljednja znamenka umnoška prvih p, $p \geq 2$ prostih brojeva?

Rješenje. Broj 2 jedini je paran broj. Među prostim brojevima je i broj 5. Tako umnožak p prostih brojeva završava s nulom. Jedino za $p = 2$ taj je umnožak jednak $2 \cdot 3 = 6$.

Primjer 3. Postoji li pravokutan trokut čije su duljine kateta jednake $a = 123\,456\,789$, $b = 987\,654\,321$, a čija je hipotenuza također cijeli broj?

Rješenje. Kvadrat cijelog broja je broj čija je posljednja znamenka neki od brojeva 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. Broj a^2 završava s 1, posljednja znamenka broja b^2 je također 1. No tada je $c^2 = a^2 + b^2$ broj koji završava s 2 i nije kvadrat nikojeg cijelog broja. Odgovor je dakle negativan.

Primjer 4. Postoji li prirodni broj n takav da zbroj $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ završava s 2 007?

Rješenje. Kako je $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, tada bi trebalo biti $n(n+1) = \ldots 4\,014$. Drugim riječima, umnožak dvaju uzastopnih cijelih brojeva morao bi završavati sa 4 014. No to nije moguće jer posljednja znamenka takvog umnoška ne može biti 4. Ona može biti samo jedan od brojeva 0, 2 ili 6.

Primjer 5. ([1] str. 96. zad 3.) Broj $9^n + 1$ završava najviše jednom nulom. Dokažite!

Rješenje. Najprije: kvadrat neparnog prirodnog broja pri djeljenju s 4 daje ostatak 1. U to se lako uvjeriti: $(2k-1)^2 = 4(k^2-k)+1$. Kako je $9^n = (3^n)^2$, onda je $9^n = 4k+1$, $k \in \mathbf{N}$, odnosno $9^n + 1 = 4k + 2$. Ovaj broj očito nije djeljiv s 4 i zato ne može završavati dvjema nulama.

Primjer 6. ([1] str. 29. zad 23.) Koja je posljednja znamenka broja $1! + 2! + 3! + \ldots + 25!$? Možete li dati rješenje općenitijeg zadatka?

Rješenje. Od broja 5! svi brojevi dalje završavaju nulom. Ovaj zbroj za posljednju znamenku ima onu kojom završava zbroj $1!+2!+3!+4! = 1+2+6+24 = 33$. Dakle, tražena je znamenka 3. Posljednja znamenka zbroja $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$, za $n > 4$ je 3. Obrazloženje je isto kao i u prethodnom rješenju. Za $n \leq 4$ lako je dati odgovor.

Primjer 7. Postoji li cijeli broj čija treća potencija završava trima osmicama?

Rješenje. Kako je posljednja znamenka 8, broj koji kubiramo mora biti oblika $10k + 2$. Tada imamo: $(10k+2)^3 = 1000k^3 + 600k^2 + 120k + 8$. No i pretposljednja znamenka je 8, što znači da broj $12k$ mora završavati s 8. To će biti ispunjeno ako je k broj koji završava s 4 ili s 9. Drugim riječima k je broj oblika $k = 5m + 4$. Tada je: $n^3 = (50m+42)^3 = 125\,000m^3 + 315\,000m^2 + 264\,600m + 74\,088$. Prva dva pribrojnika završavaju trima nulama pa u trećem valja tražiti rješenje za treću osmicu; odrediti m tako da posljednje tri znamenke od $264\,600m$ budu 800. Najmanji takav je $m = 3$. Tada je $k = 19$ i $n = 192$, a $n^3 = 7\,077\,888$.

Primjer 8. ([1] 2.1.11.) Koja je posljednja znamenka broja:

1) 2^{22}; **2)** 3^{33}; **3)** 5^{55}?

Rješenje. Jedan dio zadataka o određivanju posljednje znamenke, u kojima je riječ o cjelobrojnim potencijama, rješava se na temelju činjenice da se posljednje znamenke takvih potencija periodički ponavljaju. Čak štoviše, neke takve potencije uvijek imaju istu posljednju znamenku. To su one čija je posljednja znamenka broj 0, broj 1, broj 5 ili broj 6. Ako su baze potencija neki od brojeva 2, 3, 4, 7, 8 ili 9 tada posljednju znamenku pojedine potencije a^n za $n = 1, 2, 3, 4$ vidimo u sljedećoj tablici.

$n =$	1	2	3	4
2^n	2	4	8	6
3^n	3	9	7	1
4^n	4	6	4	6
7^n	7	9	3	1
8^n	8	4	2	6
9^n	9	1	9	1

U produženim redcima tablice periodično bi se ponavljali isti brojevi. Tako je, primjerice, posljednja znamenka broja 2^{4k-3} broj 2, posljednja znamenka od 2^{4k-2} je 4, posljednja znamenka od 2^{4k-1} je 8 a od 2^{4k} broj 6.

Možemo zaključiti:

- Posljednja znamenka broja 2^{22} je ista kao i posljednja znamenka broja 2^2, dakle 4.
- Posljednja znamenka broja 3^{33} je ista kao i posljednja znamenka broja 3^1, dakle 3.
- Posljednja znamenka broja 5^{55} je 5.

Primjer 9. Koja je posljednja znamenka broja 13^{13}?

Rješenje. Ovaj je zadatak samo *naoko* drukčiji od prethodnog. Naime, posljednja znamenka broja 13^{13} ista je kao i posljednja znamenka broja 3^{13}. A ona je pak jednaka 3.

No zanimljivo je i sljedeće rješenje: zapišimo najprije $13^{13} = (10+3)^{13}$. Prema *binomnom poučku* u raspisu ove potencije ima 14 pribrojnika. Svi, osim posljednjeg, djeljivi su s 10, dakle imaju nulu za posljednju znamenku. Posljednji je pribrojnik 3^{13} pa je posljednja znamenka tog broja ujedno i posljednja znamenka broja 3^{13}.

Primjer 10. ([1] str. 96. zad 4.) Ako je $a = 3^{18}$, $b = 4^{20}$, koja je posljednja znamenka zbroja, a koja umnoška brojeva a i b?

Rješenje ovog zadatka prepuštamo čitateljima.

Primjer 11. ([1] str. 96. zad 5.) Koja je posljednja znamenka zbroja

1) $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{100}$;
2) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{77}$;
3) $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{55}$?

Rješenje.

1) Vidjeli smo da se posljednje znamenke brojeva 3^n periodički ponavljaju. Kad se zbroje četiri uzastopne potencije broja 3, posljednja znamenka tog zbroja je 0. U našem je zbroju 25 skupina po četiri uzastopne potencije od 3 pa je cijelom zbroju posljednja znamenka 0.

2) U zbroju je 78 pribrojnika. Ako njih 76 (bez prvog i posljednjeg) razvrstamo u skupine po 4, posljednja znamenka četvorke u skupini bit će broj čija je posljednja znamenka 0. Kako 2^{77} završava znamenkom 2, cijeli zbroj je broj s posljednjom znamenkom 3.

3) Lako je zaključiti da je posljednja znamenka ovog broja 6.

Primjer 12. ([1] str. 96. zad 1.) Odredite znamenku jedinica u umnošku: $(5-2)(5^2 - 2^2)(5^3 - 2^3) \cdot \ldots \cdot (5^{2\,006} - 2^{2\,006})$.

Rješenje. Svi pomnoženi prvi članovi dat će broj kojemu je posljednja znamenka 5. Množenjem svih drugih članova dobit ćemo broj $2^{1+2+3+\ldots+2\,006} = 2^{2\,013\,021}$.

Potencije od 2 završavaju nekom od znamenki 2, 4, 8, 6, i one se periodički ponavljaju. Kako je ostatak broja 2 013 021 pri dijeljenju s 4 jednak ostatku što ga pri dijeljenju s 4 ima dvoznamenkasti završetak 21, onda je posljednja znamenka te potencije 2.

Svi ostali članovi umnoška imaju za faktore 2 i 5 pa završavaju nulom. Imamo dakle $\overline{\ldots 5} - \overline{\ldots 0} + \overline{\ldots 2} = \overline{\ldots 7}$.

Primjer 13. Odredi posljednju znamenku broja $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \cdot \ldots \cdot (4^{100}+3^{100})$.

Rješenje. Zadatak možemo riješiti na nekoliko načina.

1) Najprirodnije je primijeniti prethodno razmatranje o periodičnoj izmjeni posljednje znamenke potencija kojima je baza prirodni broj.

Tako zaključujemo:

Potencija 4^{4k} završava znamenkom 4, a potencija 3^{4k} znamenkom 1, za svaki $k \in \mathbf{N}$. To znači da se u umnošku nalazi 99 brojeva kojima je posljednja znamenka 7 i jedan broj kojem je posljednja znamenka 5. No 7^{99} završava s 3 pa je posljednja znamenka umnoška jednaka 5.

2) Ako dani umnožak pomnožimo s $4-3=1$, on se neće promijeniti, a umnožak će biti jednak $4^{200}-3^{200}$. Posljednja znamenka prvog člana je 6, a posljednja znamenka drugog 1, pa je posljednja znamenka umnoška 5.

3) Prethodna su dva rješenja *opterećena* ranijim razmatranjima. To može biti korisno i dobro, ali može nas malo zavesti i udaljti od prirodnijeg rasuđivanja.

U ovom primjeru radi se o umnošku 100 neparnih brojeva. Drugi faktor po redu je broj 15 pa je posljednja znamenka umnoška 5.

Primjer 14. ([2] str. 76. zad 16.) Odredite tri posljednje znamenke broja 11^{111}.

Rješenje. Koristeći se džepnim računalom, možemo provesti sljedeći račun:

Najprije nalazimo $11^5=161\,051$. Taj broj zapišimo u obliku $16\cdot 10^4+1\,051$. Njegovim kvadriranjem dobijemo broj koji završava s 4 601. U nastavku, neka nam oznaka $z(n)$ obilježava posljednje 4 znamenke broja n. Vratimo li se na početak, onda je $z(11^5)=1\,051$, $z(11^{10})=4601$.

I sada nastavljamo redom:

$z(11^{20})=9201$,

$z(11^{40})=8401$,

$z(11^{80})=6801$,

$z(11^{100})=z(11^{80}\cdot 11^{20})=6001$,

$z(11^{110})=z(11^{100}\cdot 11^{10})=0601$,

$z(11^{111})=z(11^{100}\cdot 11)=6611$.

Isti zadatak možemo riješiti primjenom *binomnog poučka*. Zapišimo $11^{111}=(1+10)^{111}=1+111\cdot 10+\binom{111}{2}\cdot 10^2+\binom{111}{3}\cdot 10^3+k\cdot 10^4=1+1110+610\,500+221\,815\,000+k\cdot 10^4=222\,426\,611+k\cdot 10^4$.

Primjer 15. ([1] 1.1.9.) S koliko nula završava umnožak $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 33$?

Rješenje. U ovom je umnošku 33 uzastopna prirodna broja "dvojki" više nego "petica". Rastavimo li taj broj na proste faktore, imat ćemo: $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 33=2^{31}\cdot 3^{15}\cdot 5^7\cdot 7^4\cdot 11^3\cdot 13^2\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31$. Uočimo faktor 5^7, jer on "odlučuje" o broju nula na kraju danoga broja. Dani umnožak je broj čijih su sedam posljednjih znamenki nule.

Zaključak smo mogli donijeti i jednostavnije. U danom je umnošku više dvojki nego petica. Svaka petica "donosi" po jednu nulu. Od prva 33 prirodna broja, šest ih je djeljivo s 5 i još je jedna petica u broju 25. Ukupno ih je sedam. Umnožak zato završava sa sedam nula.

* * *

Napomena. Vrlo je korisno (kad god je to moguće, i ne samo sa starijim uzrastom) pokušati riješiti općenitiji zadatak. Ovdje bi to bio sljedeći: s koliko nula završava broj $n!$?

Primjer 16. S koliko nula završava broj 2007!?

Rješenje. Treba "prebrojiti" sve petice u ovom umnošku. Njihov je broj jednak:

$$\left\lfloor\frac{2\,007}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2\,007}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2\,007}{5^3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2\,007}{5^4}\right\rfloor=401+80+16+3=500.$$

Ovo obilje lijepih primjera uvjera nas kako jedna naoko banalna tema može okupiti čitav niz raznolikosti. Svaki od zadataka donosi nešto novo, a opet ih sve povezuje neka zajednička nit. Ovakvi mali matematički projekti razvijaju kreativnost učenika, ali i našem poslu nastavnika daju dublji i sadržajniji smisao.

Literatura

[1] Branimir Dakić, Neven Elezović, *Matematika 1*, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije, "Element", Zagreb 2006.

[2] Branimir Dakić, Neven Elezović, *Matematika 4*, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, "Element", Zagreb 2006.