Konkretizacija

Zdravko Kurnik, *Zagreb*

U svakodnevnom govoru često čujemo pojmove *konkretan* i *konkretizacija* čije nam je značenje odmah jasno. Te su riječi dijelovi mnogih sintagmi koje zajedno s drugim dijelovima čine cjeline za sebe, s posve određenim vrijednostima. Evo nekih od poznatih sintagmi: *konkretno reći, konkretno dokazati, konkretni pojmovi, konkretni primjeri, konkretni zadaci, konkretne činjenice, konkretna imenica, konkretna glazba, konkretizacija projekta*.

1. O konkretizaciji

Riječ *konkretizacija* potječe od latinske riječi *concretus* što znači *stvaran, predmetan*, pa je njezino značenje očito *ostvarenje, popredmećenje*.

U znanosti je **konkretizacija** jedna od osnovnih metoda mišljenja i istraživanja. Mogli bismo je opisati kao misaonu aktivnost pri kojoj se pogled jednostrano usredotočuje na jednu stranu promatranog objekta izvan veze s njegovim drugim stranama. Njezina suprotnost je **apstrakcija**.

Konkretizacija, kao i apstrakcija, imaju važnu ulogu u matematičkim istraživanjima, a samim time i u nastavi matematike.

Podsjetimo se na prirodu matematike. Matematika u nastajanju je konkretna i induktivna znanost. Tako je matematika drevnih civilizacija Azije i Afrike, posebno Babilona i Egipta, bila konkretna, tijesno povezana s praktičnim izračunavanjima i mjerenjima. Važan korak u pravcu apstraktnih razmatranja i dokazivanja učinili su stari Grci, ali kod začetnika toga postupka, "oca" grčke matematike, Talesa u dokazivanju još uvijek vlada pomutnja između konkretnog i apstraktnog. Potpuna apstrakcija matematičkih pojmova postiže se nakon Talesa. Tako već Pitagora razmatra apstraktne geometrijske objekte, a kod njega su i brojevi apstraktni. Od tog se vremena matematika razvija kao apstraktna znanost, da bi kod Euklida došla do izražaja i kao deduktivna znanost.

Kako je u tom pogledu s matematikom kao nastavnim predmetom? Ona ima sličan razvoj. Nastava matematike u osnovnoj školi pretežno je *konkretna* i induktivna. Učitelj matematike dolazi do apstraktnih postavki, generalizacija, razmatranjem *konkretnih objekata* i *konkretnih primjera* te induktivnim zaključivanjem. Taj način je blizak i primjeren učenicima toga uzrasta. Induktivni se postupak sastoji od niza induktivnih koraka kojima se dolazi do shvaćanja općeg. Počinje se s *konkretnim objektima* i posebnim slučajevima, induktivni zaključci nižu se analogijom, a promatrane činjenice nastoje se generalizirati. Iz ovog kratkog opisa lako je zaključiti da je *konkretizacija* tijesno povezana s gotovo svim osnovnim znanstvenim metodama.

Dedukcija i deduktivni način mišljenja i dokazivanja provode se poslije konkretizacije i indukcije na višoj razini nastave matematike i obrazovanja učenika.

Mnogo je sadržaja u školskoj matematici za čiju su obradu potrebni (a važni su i za razvoj učenikova mišljenja) konkretizacija i induktivni postupak. Među takve sadržaje posebno se ubrajaju razna pravila, zakoni, formule i teoremi, pogotovo ako se oni strogo ne izvode ili ne dokazuju.

2. Primjeri

Razmotrit ćemo niz primjera u kojima se jak naglasak stavlja na primjenu konkretizacije, iako pritom ne treba zaboraviti ni druge metode.

Počinjemo primjerom prijelaza s apstraktnog na konkretno.

Primjer 1. Konkretiziranje jednakosti.

Uzmimo za ilustraciju jednostavnu jednakost $25 \cdot 6 = 150$. Tu jednakost možemo shvatiti kao rezultat apstrahiranja iz mnogih *konkretnih* odnosa. Koji konkretan sadržaj možemo dati navedenoj jednakosti? Neki od odgovora koje očekujemo od učenika su: vrijednost 25 primjeraka dnevnih novina po cijeni od 6 kuna, površina prostorije duljine 25 metara i širine 6 metara, prijeđeni put vozilom za 6 sati brzinom od 25 km/ sat i dr.

* * *

Važno nastavno gradivo su zakoni za brojeve. U skupovima prirodnih, cijelih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva vrijede: zakon komutacije, zakon asocijacije i zakon distribucije. Oni se najlakše usvajaju primjenom konkretizacije.

Primjer 2. Zakon komutacije za zbrajanje prirodnih brojeva.

Ovaj zakon učenici počinju upoznavati i usvajati već u početnoj nastavi. Kao temelj istraživanja služi nam induktivni postupak koji se sastoji od niza induktivnih zaključaka o *konkretnim* primjerima zbrajanja. Taj niz izgleda ovako:

$$3+6=9, \quad 6+3=9,$$
$$\underline{3+6=6+3};$$

$$10+15=25, \quad 15+10=25,$$
$$\underline{10+15=15+10};$$

$$72+984=1\,056, \quad 984+72=1\,056,$$
$$\underline{72+984=984+72};$$

$$84\,523+560\,079=645\,602,$$
$$560\,079+84\,523=645\,602,$$
$$\underline{84\,523+560\,079=560\,079+84\,523}.$$

Pogledajmo pažljivo dobivene jednakosti. Nije teško u njima otkriti ono opće i odvojiti ga od njihovog konkretnog sadržaja. Što je to opće? Na lijevoj strani svake jednakosti je zbroj dvaju prirodnih brojeva, a na desnoj strani zbroj tih brojeva u obrnutom poretku.

Prijelazom od konkretnih prirodnih brojeva k promjenjivim veličinama izvodi se generalizacija gornjih konkretnih jednakosti. Prema tome, ako odstranimo te konkretne prirodne brojeve i umjesto njih uvedemo promjenjive veličine, recimo a i b, dobivamo jednakost

$$a+b=b+a \quad \text{za sve} \quad a,b\in\mathbf{N}.$$

Na taj način primjenom induktivnog niza *konkretnih* jednakosti, poopćavanja i apstrahiranja vodimo učenike do otkrića *zakona komutacije za zbrajanje prirodnih brojeva*.

* * *

Primjer 3. Zakon asocijacije za množenje racionalnih brojeva.

Izgradimo induktivni niz jednakosti:

$$\left(17\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{34}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{34}{15},$$
$$17\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\right)=17\cdot\frac{2}{15}=\frac{34}{15},$$
$$\left(17\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}=17\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\right);$$
$$\left(\frac{14}{33}\cdot\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{11}{7}=\frac{91}{330}\cdot\frac{11}{7}=\frac{13}{30},$$
$$\frac{14}{33}\cdot\left(\frac{13}{20}\cdot\frac{11}{7}\right)=\frac{14}{33}\cdot\frac{141}{140}=\frac{13}{30},$$
$$\left(\frac{14}{33}\cdot\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{11}{7}=\frac{14}{33}\cdot\left(\frac{13}{20}\cdot\frac{11}{7}\right);$$

Iz riječnika metodike

$$\Big(\frac{1}{2}\cdot\Big(-\frac{3}{10}\Big)\Big)\cdot\Big(-\frac{5}{9}\Big)=\Big(-\frac{3}{20}\Big)\cdot\Big(-\frac{5}{9}\Big)=\frac{1}{12},$$
$$\frac{1}{2}\cdot\Big(\Big(-\frac{3}{10}\Big)\cdot\Big(-\frac{5}{9}\Big)\Big)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12},$$
$$\Big(\frac{1}{2}\cdot\Big(-\frac{3}{10}\Big)\Big)\cdot\Big(-\frac{5}{9}\Big)=\frac{1}{2}\cdot\Big(\Big(-\frac{3}{10}\Big)\cdot\Big(-\frac{5}{9}\Big)\Big).$$

Prijelazom od konkretnih racionalnih brojeva k promjenjivim veličinama izvodi se generalizacija gornjih konkretnih jednakosti. Prema tome, ako odstranimo te konkretne racionalne brojeve i umjesto njih uvedemo promjenjive veličine, recimo a, b i c, dobivamo jednakost

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\quad \text{za sve}\quad a,b,c\in\mathbf{Q}.$$

Na taj način primjenom induktivnog niza *konkretnih* jednakosti, poopćavanja i apstrahiranja vodimo učenike do otkrića *zakona asocijacije za množenje racionalnih brojeva*.

* * *

Razmotrimo sada jedan primjer pravila.

Primjer 4. Pravilo za množenje potencija jednakih baza.

Induktivni niz *konkretnih* množenja:

$$\begin{aligned}2^3\cdot 2^5&=(2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2)\\&=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^8,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&(-7)^2\cdot(-7)^4=\\&=((-7)\cdot(-7))\cdot((-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7))\\&=(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\\&=(-7)^6,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&\Big(\frac{5}{13}\Big)^3\cdot\Big(\frac{5}{13}\Big)^4=\\&=\Big(\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\Big)\cdot\Big(\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\Big)\\&=\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}=\Big(\frac{5}{13}\Big)^7.\end{aligned}$$

Što primjećujete? Postoji jednostavna veza između eksponenata faktora i eksponenta umnoška: $3+5=8$, $2+4=6$, $3+4=7$. Ta činjenica vodi do sljedeće generalizacije:

Umnožak potencija jednakih baza jest potencija kojoj je baza ista, a eksponent jednak zbroju eksponenata faktora, tj. vrijedi jednakost

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$

gdje je a racionalan broj, a m i n prirodni brojevi.

* * *

U tematskoj cjelini *djeljivost prirodnih brojeva* gotovo sve teme pogodne su za istraživački rad učenika (i primjenu džepnog računala). Postoje mnogi dokazni zadaci o djeljivosti prirodnih brojeva, a gotovo u svima se odmah prelazi na dokaz. Međutim, učenike treba učiti da u takvim situacijama tvrdnje najprije provjere u nekoliko konkretnih slučajeva. Primjena *konkretizacije* i indukcije može ih dovesti do novih zanimljivih tvrdnji.

Pokazat ćemo to u sljedećem primjeru.

Primjer 5. Djeljivost brojeva oblika *ababab* i *abcabc*.

U zbirkama zadataka mogu se naći tvrdnje da su brojevi tih oblika djeljivi s 13. Pogledajmo što nam može dati konkretizacija.

1) Lako uočavamo da je broj *ababab* djeljiv s 3, što je korisno primijeniti pri rastavljanju. Sada izgrađujemo induktivni niz konkretnih rastava, počevši od najmanjeg:

$$\begin{aligned}101\,010&=2\cdot50\,505=2\cdot3\cdot16\,835\\&=2\cdot3\cdot5\cdot3\,367\\&=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot481\\&=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot37,\\292\,929&=3\cdot97\,643=3\cdot7\cdot13\,949\\&=3\cdot7\cdot13\cdot1\,073\\&=3\cdot7\cdot13\cdot29\cdot37,\\565\,656&=2\cdot282\,828=2\cdot2\cdot141\,414\\&=2\cdot2\cdot2\cdot70\,707\\&=2\cdot2\cdot2\cdot7\cdot10\,101\\&=2\cdot2\cdot2\cdot7\cdot3\cdot3\,367\\&=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot7\cdot481\\&=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot7\cdot13\cdot37,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 898\,989 &= 3 \cdot 299\,663 \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 42\,809 \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 89 \cdot 481 \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 89 \end{aligned}$$

itd. Vidimo da brojevi promatranog oblika nisu djeljivi samo s 13, već i s nekoliko drugih brojeva. *Konkretizacija* dovodi učenike do prvog "otkrića":

Brojevi oblika ababab uvijek su djeljivi s 3, 7, 13 i 37.

Do rastava brojeva na proste faktore i gornje tvrdnje dolazimo brže ako uočimo da je broj oblika *ababab* djeljiv brojem *ab*. Naime, za gornje brojeve tada imamo redom

$$\begin{aligned} 101\,010 &= 10 \cdot 10\,101, \\ 292\,929 &= 29 \cdot 10\,101, \\ 565\,656 &= 56 \cdot 10\,101, \\ 898\,989 &= 89 \cdot 10\,101, \end{aligned}$$

a rastav zajedničkog faktora glasi $10\,101 = 3 \cdot 3\,367 = 3 \cdot 7 \cdot 481 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$.

2) Lako uočavamo da je broj oblika *abcabc* djeljiv brojem *abc*. Na temelju te činjenice izgrađujemo induktivni niz rastava konkretnih brojeva oblika *abcabc* na proste faktore, počevši od najmanjeg 100 100:

$$\begin{aligned} &100\,100 = 100 \cdot 1\,001 = (2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 1\,001, \\ &437\,437 = 437 \cdot 1\,001 = (19 \cdot 23) \cdot 1\,001, \\ &521\,521 = 521 \cdot 1\,001, \\ &999\,999 = 999 \cdot 1\,001 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37) \cdot 1\,001 \end{aligned}$$

itd. Sad se vidi da svi konkretni brojevi oblika *abcabc* u svojim rastavima imaju zajednički faktor 1 001, a njegov rastav glasi $1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. To vodi do drugog "otkrića":

Brojevi oblika abcabc uvijek su djeljivi sa 7, 11 i 13.

Napomena. U gornjim se izvodima mogu otkriti i načini dokazivanja izvedenih tvrdnji. Dokaze prepuštamo čitateljima.

* * *

Na matematičkim natjecanjima česti su dokazni zadaci s djeljivošću brojeva. Nastavnik matematike treba te zadatke iskoristiti za dublje poučavanje. Umjesto samo neposrednih dokaza tvrdnji u tim zadacima, može primjenom *konkretizacije* učenike ponovo najprije voditi do "otkrića" tih tvrdnji ili do još boljih tvrdnji.

Primjer 6. Zadaci s natjecanja.

1) *Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s* 9.

Do ove tvrdnje možemo doći ovako: tri uzastopna prirodna broja označimo s n, $n+1$, $n+2$, promatrajmo izraz $f(n) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ i analizirajmo taj izraz. Induktivni niz *konkretnih* trojki:

$$\begin{aligned} (1,2,3) \quad f(1) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 \\ &= 36 = 9 \cdot 4, \\ (2,3,4) \quad f(2) &= 2^3 + 3^3 + 4^3 \\ &= 99 = 9 \cdot 11, \\ (3,4,5) \quad f(3) &= 3^3 + 4^3 + 5^3 \\ &= 216 = 9 \cdot 24, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (11,12,13) \quad f(11) &= 11^3 + 12^3 + 13^3 \\ &= 5\,256 = 9 \cdot 584 \end{aligned}$$

itd. Nakon ove jednostavne analize slijedi gornja tvrdnja.

2) *Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv zbrojem tih brojeva.*

Ponovo jasna postavka i jasna tvrdnja. Da bismo zadatku dali istraživački karakter, postavimo općenitiju problemsku situaciju: neka je tvrdnja nepoznata, a predmet istraživanja neka je druga djeljivost zbroja kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva.

Razmatranja u **1)** malo ćemo preinačiti. Uz zbrojeve kubova promatrajmo zbrojeve baza. Otkrivamo da se zbrojevi kubova mogu pisati i kao produkti

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \\
&= (1 + 2 + 3) \cdot 6, \\
f(2) &= 2^3 + 3^3 + 4^3 = 99 \\
&= (2 + 3 + 4) \cdot 11, \\
f(3) &= 3^3 +^3 4^3 + 5^3 = 216 \\
&= (3 + 4 + 5) \cdot 18,
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
f(11) &= 11^3 + 12^3 + 13^3 = 5\,256 \\
&= (11 + 12 + 13) \cdot 146
\end{aligned}
$$

itd. Nakon ove složenije analize slijedi tvrdnja iskazana u drugom zadatku.

Sad su tek na redu dokazi dobivenih tvrdnji. Nije ih teško opravdati.

Nakon kubiranja se izraz $f(n)$ može pisati u obliku $f(n) = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3n(n^2+5) + 9(n^2+1)$. Za prvu tvrdnju treba još samo pokazati da je izraz $n(n^2+5)$ djeljiv s 3. Nova tvrdnja! Svaki prirodni broj n može se zapisati na jedan od sljedeća tri načina $3k$, $3k-1$, $3k-2$. Ako je n prvog oblika, djeljiv s 3 je prvi faktor, a ako je n drugog ili trećeg oblika, djeljiv s 3 je drugi faktor.

Izraz $f(n)$ može se razložiti na faktore. Razlaganje se provodi ovako $f(n) = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 6n + 9n + 9 = 3n^2(n+1) + 6n(n+1) + 9(n+1) = 3(n+1)(n^2+2n+3)$. Ovaj produkt djeljiv je s $3(n+1)$, a to je upravo zbroj brojeva n, $n+1$, $n+2$. To potvrđuje valjanost druge tvrdnje.

3) *Ako prirodni broj n nije djeljiv s* 4, *dokažite da je zbroj* $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ *djeljiv s* 5.

Provedimo malo ispitivanje izraza $f(n) = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$. Induktivni niz *konkretnih* slučajeva:

$n = 1 \quad f(1) = 1+2+3+4 = 10,$

$n = 2 \quad f(2) = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30,$

$n = 3 \quad f(3) = 1^3+2^3+3^3+4^3 = 100,$

$\underline{n = 4} \quad f(4) = 1^4+2^4+3^4+4^4 = \underline{254},$

$n = 5 \quad f(5) = 1^5+2^5+3^5+4^5 = 1\,300,$

$n = 6 \quad f(6) = 1^6+2^6+3^6+4^6 = 4\,890,$

$n = 7 \quad f(7) = 1^7+2^7+3^7+4^7 = 18\,700,$

$\underline{n = 8} \quad f(8) = 1^8+2^8+3^8+4^8 = \underline{72\,354},$

$n = 9 \quad f(9) = 1^9+2^9+3^9+4^9 = 282\,340$

itd. Što primjećujemo? Svi izrazi završavaju s 0, osim za višekratnike broja 4. To znači da bi mogla vrijediti ne samo gornja tvrdnja, već jača tvrdnja:

Ako prirodni broj n nije djeljiv s 4, *tada je zbroj* $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ *djeljiv s* 10.

Tvrdnja vrijedi, a dokaz se provodi razmatranjem prirodnih brojeva n oblika $n = 4k+1$, $n = 4k+2$ i $n = 4k+3$ i znamenaka jedinica pojedinih potencija.

Vratimo se na induktivni niz i uočimo da izrazi za višekratnike broja 4 završavaju s 54. Je li to slučajno ili vrijedi tvrdnja:

Ako je prirodni broj n djeljiv s 4, *tada zbroj* $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ *završava s* 54?

Ispitajte ovu novu problemsku situaciju!

* * *

Razmotrimo primjer skladnog povezivanja *konkretizacije*, apstrakcije i generalizacije pri izvođenju formule.

Primjer 7. Kvadratna jednadžba.

Mnogi se problemi u svakodnevnom životu i matematici svode na rješavanje kvadratnih jednadžbi. Promatrajmo za ilustraciju konkretne jednadžbe

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 24x - 3\,337 = 0.$$

One su dobivene pri rješavanju dvaju matematičkih problema istog tipa (zbroj dvaju brojeva je 8, odnosno 24, a umnožak 15, odnosno $-3\,337$). Pretpostavimo da učenici još nisu učili rješavati ovakve jednadžbe. Imamo, dakle, *konkretnu situaciju*, ali ne i mogućnost njezina razrješenja!

Međutim, ova problemska situacija pobuđuje potrebu rješavanja jednadžbi dobivenog oblika i na taj način daje motivaciju za uvođenje pojma i rješavanje kvadratne jednadžbe oblika

$$ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c\in\mathbf{R}, \quad a\neq 0.$$

Prijelaz od *konkretnih objekata* $x^2-8x+15=0$ i $x^2-24x-3\,337=0$ k općem objektu $ax^2+bx+c=0$ ostvaren je primjenom apstrakcije i generalizacije.

Nakon pronalaženja formula

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

za rješenja opće kvadratne jednadžbe učenici znaju pomoću *konkretizacije* (zamjena općih koeficijenata a, b, c konkretnim koeficijentima) rješavati ne samo polazne konkretne kvadratne jednadžbe, nego i sve druge jednadžbe toga tipa.

* * *

Razmotrimo važan primjer poučka pri čijem se otkrivanju skladno povezuju *konkretizacija* i analogija.

Primjer 8. Jednakost polinoma.

1) Razmotrimo pitanje jednakosti dvaju polinoma prvog stupnja $P(x)=ax+b$ i $Q(x)=cx+d$.

Iz $P(x)=Q(x)$ za svaki $x\in\mathbf{R}$ dobivamo da za $x=0$ vrijedi jednakost $a\cdot 0+b=c\cdot 0+d$, tj. $b=d$. Sada iz $ax+b=cx+b$ slijedi $ax=cx$, pa za $x=1$ dobivamo konačno $a=c$.

Polinomi prvog stupnja $P(x)=ax+b$ i $Q(x)=cx+d$ jednaki su ako i samo ako je $a=c$ i $b=d$.

2) Razmotrimo pitanje jednakosti dvaju polinoma drugog stupnja $P(x)=ax^2+bx+c$ i $Q(x)=dx^2+ex+f$.

Iz $P(x)=Q(x)$ za svaki $x\in\mathbf{R}$ dobivamo da za $x=0$ vrijedi jednakost $a\cdot 0+b\cdot 0+c=d\cdot 0+e\cdot 0+f$, tj. $c=f$. Sada iz $ax^2+bx+c=dx^2+ex+c$ slijedi $ax^2+bx=dx^2+ex$ ili $x(ax+b)=x(dx+e)$. Ova jednakost mora vrijediti za svaki $x\in\mathbf{R}$, a to je moguće samo tako da je $ax+b=dx+e$, što za $x=0$ daje $b=e$. Dalje, iz $ax+b=dx+b$ slijedi jednakost $ax=dx$, te konačno za $x=1$ i posljednja tražena jednakost $a=d$.

Polinomi drugog stupnja $P(x)=ax^2+bx+c$ i $Q(x)=dx^2+ex+f$ jednaki su ako i samo ako je $a=d$, $b=e$ i $c=f$.

3) Analognim postupkom dokazuje se da su polinomi trećeg stupnja $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ i $Q(x)=ex^3+fx^2+gx+h$ jednaki ako i samo je $a=e$, $b=f$, $c=g$ i $d=h$.

Na taj smo način primjenom konkretizacije i analogije dobili induktivni niz od tri dokazane tvrdnje. Sada je moguće postaviti opću tvrdnju, generalizaciju:

Dva su polinoma jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako imaju jednake koeficijente uz iste potencije varijable.

Naravno, opća tvrdnja nije dokazana. Dokaz tek treba pronaći.

3. Metodičke napomene

Vidjeli smo da je danas nastava matematike u nižim razredima osnovne škole pretežno *konkretna* i induktivna. To od učitelja matematike zahtijeva primjeren pristup poučavanju učenika i primjeni *konkretizacije*.

U *konkretnoj nastavi* potreban je primjeren broj *konkretnih slučajeva*. Često učitelj matematike razmatra premali broj takvih slučajeva, pa izvedene tvrdnje postaju neuvjerljive i nejasne, a posljedica je manjkavo znanje učenika. Čest je i drugi propust učitelja ako ne pruža priliku većem broju učenika da sudjeluju u izgradnji induktivnog niza *konkretnih slučajeva*.

Kritično mjesto obrade nekog matematičkog pojma je prijelaz na onaj stupanj u kojem nakon *konkretizacije* počinje postupak apstrahiranja, jer je prijelaz s *konkretnog* na apstraktno za neke učenike dosta težak.

Izvođenje generalizacija također je kritično mjesto nastave matematike, jer prijelaz s *konkretnog* i pojedinačnog k općem neki učenici teško svladavaju. Zato je pred učiteljem matematike odgovorna zadaća da svojim metodičkim pristupom i umješnošću učenicima učini taj prijelaz što lakšim.

U ovom je članku opisana samo jedna od osnovnih znanstvenih metoda, konkretizacija. Međutim, svoju ulogu u nastavnom procesu imaju i druge osnovne znanstvene metode: analiza, sinteza, analogija, apstrakcija, generalizacija, specijalizacija, indukcija i dedukcija. Sve one ne dolaze pojedinačno, već se isprepliću i nadopunjuju.

Posebno napominjemo da nastavnik matematike ne mora biti znanstvenik da bi u nastavi pravilno i primjereno primjenjivao načelo znanstvenosti i znanstvene metode. To se u nastavi matematike nameće samo po sebi. Rješavanje svakog problema ima nešto otkrivačko i stvaralačko. Zato je potrebno samo da nastavnik u svojim učenicima razvija radoznalost duha, sklonost za samostalan umni rad i da im ukazuje na putove prema novim otkrićima. Ako se znanstveni postupci primjereno i pravilno primjenjuju, s nužnim osjećajem za težinu matematičkih sadržaja i matematičkog načina mišljenja, uvažavajući matematičke sposobnosti svakog pojedinog učenika, može se očekivati da će nastava matematike biti uspješna.

Literatura

[1] Zdravko Kurnik, *Analiza*, Matematika i škola 2 (1999.), 54–64.
[2] Zdravko Kurnik, *Analogija*, Matematika i škola 3 (2000.), 101–109.
[3] Zdravko Kurnik, *Generalizacija*, Matematika i škola 4 (2000.), 147–154.
[4] Zdravko Kurnik, *Indukcija*, Matematika i škola 5 (2000.), 197–203.
[5] Zdravko Kurnik, *Apstrakcija*, Matematika i škola 6 (2000.), 11–15.
[6] Zdravko Kurnik, *Načelo znanstvenosti*, Matematika i škola 13 (2002.), 102–106.
[7] Zdravko Kurnik, *Specijalizacija*, Matematika i škola 27 (2004), 52–58.

Uz Dan broja π

Učenici 1. razreda gimnazije u Srednjoj školi Ambroza Haračića u Malom Lošinju sa svojom profesoricom Jelenom Bralić, obilježili su Dan broja π. Izradili su toliki broj decimala koliko ih je u razredu. Na satu matematike pogledali su prezentaciju *Broj* π, a ostali su učenici mogli na panou pred ulazom učionice i nešto zanimljivo pročitati o tom broju.

1.g s profesoricom