

Matematička pismenost

1. dio

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb

Uvod

U posljednjih nekoliko godina često se spominjalo PISA testiranje, kao i novi termini vezani uz njega: *čitalačka pismenost*, *matematička pismenost* i *prirodoslovna pismenost*. Nama matematičarima je pritom posebno zanimljivo zazvučao pojam *matematička pismenost*, iako do sada u hrvatskim izvorima nismo nigdje imali prilike saznati detalje o matematičkoj pismenosti:

- Kako se mjeri matematička pismenost?
- Kako odrediti koji pojedinac je “matematički pismeniji” od drugoga?
- Zašto treba uvoditi novi pojam “matematička pismenost”, zar nisu dovoljni matematički testovi u školama da bi se utvrdilo kako i u kojoj mjeri učenik vlada matematikom?
- Je li matematička pismenost nešto izvan kurikula? Itd.

Stoga smatram da bi našim nastavnicima bilo korisno dati vrlo detaljna i opširna objašnjenja o ovom pojmu, njegovim komponentama te problemima koji se vežu uz matematičku pismenost i uz PISA projekt. Posebno zahvaljujem gospođi Michelle Braš Roth, nacionalnom projekt menadžeru za PISA-u u Hrvatskoj, koja je u cijelosti pročitala ovaj članak prije objavljivanja u *Miš*-u i dala vrlo vrijedne i korisne napomene.

PISA istraživanje

PISA (Programme for International Student Assessment) je program međunarodnog procjenjivanja znanja i vještina učenika kojeg su zajednički razvile zemlje članice organizacije OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development). Cilj razvoja i uvođenja PISA programa je bio “*utvrđivanje stupnja do kojeg*

su učenici, koji se bliže završetku obaveznog obrazovanja, usvojili neka znanja i stekli kvalifikacije koje su neophodne za njihovo potpuno uključivanje u društvo” (PISA/ OECD Framework). Službene stranice OECD/ PISA-e nalaze se na adresi www.pisa.oecd.org.

Prvo međunarodno PISA istraživanje organizirano je 2000. godine, a nakon toga se provodi svake treće godine i ispituje čitalačku, matematičku i prirodoslovnu pismenost. Dvije trećine svakog ispitivanja posvećuju se tzv. glavnoj domeni. Tako je glavna domena u 2000. godini bila čitalačka pismenost, u 2003. to je bila matematička pismenost, a u 2006. godini to je bila prirodoslovna pismenost. Sljedećeg puta, 2009. godine, kreće se opet s čitalačkom pismenošću kao glavnim područjem i tako redom.

Hrvatska je 2006. godine prvi puta sudjelovala u ovom međunarodnom projektu, a rezultate, kako naših učenika tako i svih ostalih zemalja sudionica, znat ćemo u prosincu 2007. godine. U ovom projektu (2006. je bio naglasak na testiranju prirodoslovne pismenosti) sudjelovalo je oko 5 000 naših učenika, ali većina podataka vezana uz njih i uz PISA testiranje u 2006. godini smatra se službenom tajnom do objavljivanja rezultata. Kako će se nakon objave rezultata u medijima mnogo pisati o PISA programu i baratati raznim pojmovima i podacima, možda je sada pravo vrijeme čitatelje *Miš*-a pobliže upoznati s ovom komponentom PISA testiranja.

Što je matematička pismenost?

Već u samim osnovnim opisima PISA ciljeva spominje se matematička pismenost. No, što je točno matematička pismenost? Naziv na prvi pogled djeluje prilično zbudjujuće. Definicija

matematičke pismenosti koju je donijela Ekspertna skupina za matematiku glasi:

Matematička pismenost je sposobnost pojedinca da prepozna i razumije ulogu koju matematika ima u svijetu, da donosi dobro utemeljene odluke i da primjenjuje matematiku na načine koji odgovaraju potrebama trenutnog i budućeg života tog pojedinca kao konstruktivnog, odgovornog i promišljajućeg građanina. (Prijevod: D. G. G.)

Hrvatski termin *matematička pismenost* izravan je prijevod engleskog originala *mathematical literacy*.

Uz ovu definiciju matematičke pismenosti potrebno je navesti još neka dodatna pojašnjenja pojma *matematičke pismenosti*.

- Pojam *matematička pismenost* bio je izabran kako bi se naglasilo da se testira matematičko znanje stavljeno u **funkcionalni kontekst**, tj. u mnoštvo raznih situacija. Prilikom uporabe pojma *matematička pismenost*, PISA naglašava da se u njezinom primarnom fokusu ne nalaze matematičko znanje i vještine koji su definirani matematičkim školskim kurikulumima. Umjesto toga, pod *matematičkom pismenošću* podrazumijeva se ono matematičko znanje koje je stavljeno u funkcionalnu primjenu mnogih različitih konteksta (kako analizirati, poimati i efikasno komunicirati kroz postavljanje, formuliranje, rješavanje i interpretaciju matematike u mnoštvu situacija). Zadaci pritom sežu od čisto matematičkih do onih u kojima se matematička struktura niti ne nazire na prvi pogled.
- Ispitivanje se fokusira na **probleme iz stvarnog života**, krećući se izvan granica problema tipičnih za školske učionice. OECD je stavio naglasak upravo na probleme iz stvarnog života jer želi istaknuti pitanje: “Pripremaju li škole djecu za potpuno uključivanje u društvo?” Naime, građani se u životu svakodnevno susreću sa situacijama u kojima bi matematičke sposobnosti mogle biti od pomoći prilikom pojašnjavanja ili rješavanja problema: u kupovini, na putovanjima, prilikom donošenja pravih poslovnih odluka, prilikom bavljenja s vlastitim financijama itd. Također, mediji su puni točnih (ili netočnih) podataka prikazanih u obliku tablica, dijagrama, grafova i drugih vizualnih prikaza koje je potrebno razumjeti i vrednovati. Netko će reći da u matematičkim udžbenicima širom svijeta postoje zadaci

koji simuliraju ovakve probleme iz svakodnevice. No, u PISA zadacima se zahtijeva sposobnost primjene tih vještina u kontekstu koji nije toliko strog i strukturiran kao što je to slučaj sa školskim udžbenicima. Primjerice, svaki zadatak u udžbeniku sigurno ima veze s teorijom nastavne teme unutar koje se taj zadatak nalazi. U svakodnevnom pak životu sami moramo birati matematički model kojeg ćemo upotrijebiti za rješavanje zadanog problema, a zatim znati i kako se postaviti prema točnosti nađenog rješenja.

- Razmislimo li malo pomnije o terminu *pismenosti* kojeg otprije poznamo u lingvističkom smislu, on se ne odnosi samo na puko razumijevanje vokabulara, čitanja i poznavanja pisma nekog jezika, već i na nešto više od toga. Kada se za nekog čovjeka kaže da je *vrlo pismen*, znači da uz osnove poznavanja gramatike i pravopisa nekog jezika, on posjeduje i neke dodatne kvalitete poput vlastitog stila, sposobnosti analiziranja i izričaja ideja na nivou višem od osnovnog. U svakodnevici se prilikom komunikacije koristimo kombinacijom svih nabrojanih elemenata. Na isti način ni *matematička pismenost* ne može biti reducirana samo na puko znanje matematičke terminologije, činjenica, procedura kao i brojnih vještina izvođenja određenih operacija, provođenja određenih metoda itd. Naprotiv, o *matematičkoj pismenosti* razmišljamo kao o širokom spektru sposobnosti, znanja i vještina koje se nižu od osnovnih stupnjeva do složenijeg ovladavanja matematičkim aparatom, kao i drugim logičkim i socijalnim aparatima.
- Stavovi i emocije (npr. samopouzdanje, znatiželja, osjećaji zanimanja i važnosti, žudnja da se naprave ili razumiju stvari) nisu komponente definicije *matematičke pismenosti*. Unatoč tome, one su važne pretpostavke za nju. U načelu je moguće biti matematički pismen bez posjedovanja tih stavova i emocija u isto vrijeme. Ipak, nije baš vjerojatno da će se ta pismenost pokazati i moći primijeniti u praksi kod osobe koja nema neki stupanj samopouzdanja, znatiželje, osjećaja zanimanja, važnosti i žudnje da napravi ili razumije stvari koje sadrže matematičke komponente.
- *Matematička pismenost* nije samo ublažen izraz za znanje matematike, već je nešto posve drukčije – manje formalno i više intuitivno,

manje apstraktno i više kontekstualno, manje simboličko i više konkretno. Pismenost podrazumijeva integriranu sposobnost za funkcioniranjem unutar praktičnog društva. Funkcionalnost je svakako ključna točka, kako u sebi, tako i u odnosu prema praktičnom društvu, što uključuje i društvo matematičara. (Ewell 2001, *The Mathematics and Democracy*)

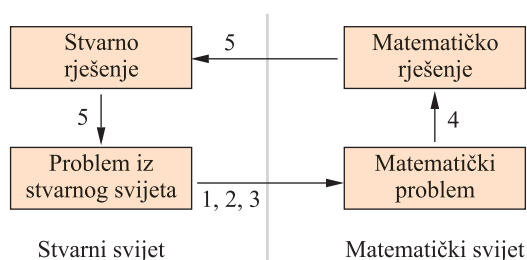
Proces matematizacije

Prilikom testiranja matematičke pismenosti rješavamo probleme iz stvarnog života. To znači da ti problemi nisu prikazani “čisto” matematičkim jezikom, već su stavljeni u neku vrstu “situacije”. Ukratko, učenici trebaju riješiti problem iz stvarnog života koristeći vještine i znanja koje su usvojili kroz školovanje i životna iskustva. Fundamentalna uloga u tom procesu se odnosi na *matematizaciju* (engl. *mathematisation*).

Proces *matematizacije* ili matematičkog modeliranja se sastoji od pet koraka i prikazan je u obliku cikličkog procesa. On počinje problemom smještenim u stvarnost (*1. korak*). Zatim učenik prepoznaje matematičke koncepte u zadanom problemu (*2. korak*), nakon čega postupno nestaje stvarni događaj i naglasak se stavlja na planiranje rješavanja problema matematičkim alatima (*3. korak*). Ova tri koraka nas vode iz problema stvarnosti u matematički problem. Sljedeći se korak odnosi na rješavanje matematičkog problema (*4. korak*). Nakon rješavanja problema postavlja se pitanje koje je značenje ovog strogo-matematičkog rješenja u okvirima stvarnog svijeta (*5. korak*). Ovaj posljednji korak je često iz opravdanih ili neopravdanih razloga zanemaren u školskoj matematici, a vrlo je važan za rješavanje problema iz svakodnevice. Primjerice, strogi matematički putovi rješavanja često mogu dati i rješenja prikazana negativnim ili kompleksnim brojevima koja ne mogu biti rješenja neke situacije iz svakodnevnog života. Takve nelogičnosti je potrebno primijetiti. Također, uz ovaj problem se veže i potreba za dobrom komunikacijom, tj. uz uviđanje nemogućih rješenja, potrebno je precizno i jasno formulirati problem i objasniti rješenje.

U mnogim izvorima (Steiner i Ruppen 2005., De Lange 2005.) navode se razni krugovi matematizacije uz sitne međusobne razlike. De Lange (2005.) ciklički proces *matematizacije* prikazuje sljedećom shemom:

KRUG MATEMATIZACIJE



Objasnilo proces *matematizacije* kroz dva primjera iz PISA ispitnih pitanja.

Primjer 1. RASVJETA

Gradsko vijeće želi postaviti rasvjetu u mali park trokutastog oblika tako da svjetiljka obasjava cijeli park. Gdje treba smjestiti svjetiljku?

Proces matematizacije:

1. korak: Problem počinje sa situacijom iz stvarnosti, tj. svjetiljku treba smjestiti na pravo mjesto u parku.

2. korak: Zadanoj situaciji treba organizirati prema matematičkim konceptima, tj. park se može prikazati trokutom, a svjetlost koju odašilje svjetiljka krugom čije središte predstavlja položaj svjetiljke.

3. korak: Stvarnost polako nestaje, a dolaze ideje kako riješiti matematički problem, tj. primjećuje se da treba naći središte kruga koji opisuje zadani trokut.

4. korak: Rješavamo matematički problem uz korištenje činjenice da se središte trokuta opisane kružnice nalazi u sjecištu simetrala stranica tog trokuta, a zatim slijedi konstrukcija. Važno je naglasiti da je za rješavanje problema potrebno i dobro znanje “čiste” matematike.

5. korak: Tražimo značenje matematičkog rješenja u okviru zadane situacije iz svakodnevnog života, tj. promišljanje o rješenju. Primjerice, važno je opaziti da, ukoliko je park oblika tupokutnog trokuta, rješenje ne bi imalo smisla jer bi se svjetiljka nalazila izvan parka, a Gradsko vijeće želi svjetiljku staviti u park. Također, važno je opaziti da je veličina drveća u parku još jedan faktor koji utječe na smislenost i korisnost matematičkog rješenja.

* * *

Iz ovih se koraka vidi kako bi informiran i promišljajući građanin trebao koristiti matematiku u svakodnevnom životu. U okviru OECD/ PISA-ina glavnog nacrta (Framework) o matematičkoj pismenosti ističe se da učenje matematizacije treba biti osnovni obrazovni cilj za sve učenike, jer, kako danas tako i u budućnosti, svaka će država trebati matematički pismene građane koji će se znati nositi s vrlo složenim i promjenljivim društvom.

Primjer 2. OTKUCAJI SRCA

Zbog zdravstvenih problema ljudi bi trebali ograničiti svoja naprezanja, primjerice, za vrijeme sportskog treninga, kako ne bi premašili određenu frekvenciju otkucaja srca.

Godinama je odnos između preporučenog maksimalnog broja otkucaja srca i starosti ispitanika bio opisan formulom:

$$\text{preporučeni maksimalni broj otkucaja srca} = 220 - \text{godine.}$$

Nedavna istraživanja su pokazala da bi se ova formula trebala modificirati. Nova formula glasi:

$$\text{preporučeni maksimalni broj otkucaja srca} = 208 - (0.7 \cdot \text{godine}).$$

Koja je glavna razlika između ovih dviju formula i kako one utječu na maksimalni dopušteni broj otkucaja srca?

(originalno pitanje modificirao J. De Lange)

1. korak: Kao što je jasno iz zadatka, stvarnost je u ovom slučaju tjelesno zdravlje. Važno pravilo prilikom rješavanja zadatka je da se ne smije mršavost uzimati za ideal jer bi to moglo uzrokovati zdravstvene probleme. To možemo zaključiti iz teksta: maksimalni broj otkucaja srca.

2. korak: Riječima su zadane dvije formule koje treba razumjeti, usporediti i pronaći što one zaista znače u matematičkim okvirima. Formule daju odnose između iznosa preporučenog maksimalnog broja otkucaja srca i starosti ispitanika.

3. korak: Postoji više načina da se zadatak prebaci u strogo matematički problem. Možemo formule zapisane riječima pretvoriti u formalnije izraze:

$$y = 220 - x \quad y = 208 - 0.7x$$

Naravno, pritom y izražava maksimalni broj otkucaja srca u minuti, a x je starost u godinama. Drugi način je crtanje grafova.

Ova tri koraka nas vode iz problema stvarnosti u matematički problem.

4. korak: Matematički problem se sastoji u uspoređivanju dviju formula ili grafova i u iskazivanju razlika za ljude različite dobi. Tražimo gdje dvije formule daju jednake rezultate ili gdje se grafovi sijeku. Stoga rješavamo jednadžbu:

$$220 - x = 208 - 0.7x.$$

Rješenje je $x = 40$, a pripadajuća vrijednost za y je 180. Dakle, grafovi se sijeku u točki (40, 180).

Kako je koeficijent prve formule -1 , a koeficijent druge -0.7 , znamo da drugi graf sporije raste od prvoga. Ili, graf zadan formulom $y = 220 - x$ leži "iznad" grafa $y = 208 - 0.7x$ za vrijednosti x manje od 40 i "ispod" za vrijednosti x veće od 40.

Sada krenimo na 5. korak da vidimo pomaže li nam ovo rješenje matematičkog problema u rješavanju problema iz stvarnog života.

5. korak: Ako je osoba stara 40 godina, obje formule daju jednak rezultat: maksimalne otkucaje od 180. "Staro" pravilo dopušta mlađim ljudima više vrijednosti otkucaja: ekstremno, ako je dob 0, maksimum će biti 220 po staroj formuli i samo 208 po novoj formuli.

No, za starije ljude, u ovom slučaju su to oni iznad 40, zadnje studije dozvoljavaju i veće maksimalne brojeve otkucaja. Za primjer ćemo opet dati ekstrem: stara formula će za stogodišnjaka dati maksimum od 120, a nova 138 otkucaja.

Uz to treba dodati: formulama nedostaje matematička preciznost te daju osjećaj kvaziznanstvenosti. Stoga ih se treba uzeti s oprežnošću. Druga važna stvar je da se vrijednosti za ekstremnu dob ne trebaju uzimati previše ozbiljno.

Ovaj primjer pokazuje da čak u relativno jednostavnim zadacima, koji se mogu riješiti u kratkom vremenu, još uvijek možemo identificirati cijeli krug *matematizacije* i rješavanje problema.

* * *

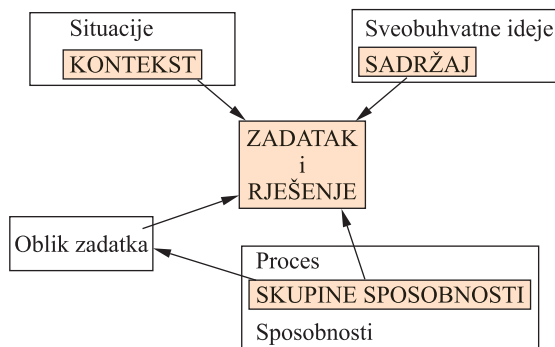
Primjeri pokazuju da matematička pismenost izlazi izvan okvira većine kurikulumskog matematičkog sadržaja. Netko se može upitati je li zaista

potrebno da svaki građanin nauči proces *matematizacije* sa svim koracima. Primjerice, treba li to običnim radnicima, domaćicama i ostalima koji nisu menadžeri, ekonomisti, teoretičari itd. No danas čak i obični radnici dobivaju ovlasti za rukovanje raznim aparatima i tehnologijom kako bi nadzirali strojeve koji sve više obavljaju fizičke poslove umjesto tih istih radnika. Kod većine zanimanja javlja se opća potreba za sposobnošću razumijevanja, komunikacije, korištenja i objašnjenja koncepata i procedura baziranih na matematičkom mišljenju. Stoga je važno staviti naglasak na proces *matematizacije* tijekom školovanja. PISA testovi su vrlo detaljno kreirani i dizajnirani, kako bi se testirali svi dijelovi procesa *matematizacije*. Zbog što kvalitetnijeg testiranja složena je cijela teoretska pozadina matematičke pismenosti. Kažemo da matematička pismenost objedinjuje tri dimenzije: sadržaj, kontekst i sposobnosti.

“Tri c”

Kako bi se matematička pismenost mogla (iz)mjeriti, bilo je potrebno kreirati njezinu opsežnu teoretsku pozadinu. Kažemo da matematička pismenost u svom teoretskom dijelu objedinjuje tri dimenzije: **sadržaj**, **kontekst** i **sposobnosti**. Te tri dimenzije u engleskom se tekstu obično kratko označavaju kraticom ”tri c”. “Tri c” znače: *content* (sadržaj — matematički sveobuhvatne ideje), *context* (kontekst) i *competencies* (kompetencije, sposobnosti). Ove komponente se mogu povezati u obliku shematskog prikaza kao na slici (OECD/ PISA Mathematics Framework 2003.):

KOMPONENTE MATEMATIČKE DOMENE



Zadatak, kao centralni dio PISA studije, kreira se tako da se pojavljuje u sklopu nekih situacija stvarnog života, a način, kako je situacija opisana u matematičkom zadatku, zove se **kontekst**. Tako je, primjerice, u zadatku sa svjetiljkom u parku dana situacija iz lokalne zajednice, a kontekst je svjetlo u parku.

Sljedeća komponenta stvarnog svijeta, o kojoj se mora voditi računa kada se govori o matematičkoj pismenosti, je **matematički sadržaj** koji je potreban za rješavanje problema. Tako je u zadatku sa svjetiljkom u parku potrebno geometrijsko znanje povezano s idejama prostora i oblika.

Kako bi učenik uspješno riješio zadani problem, treba posjedovati određene **sposobnosti**. I dok su situacije i konteksti povezani sa stvarnim životom, a sadržaj i sveobuhvatne ideje se strogo odnose na matematičku pozadinu zadanog problema, upravo sposobnosti predstavljaju jezgru matematičke pismenosti. Jer tek kada posjeduju određene sposobnosti, učenici će biti u poziciji uspješno riješiti zadani problem.

Uz ove tri komponente važno je naglasiti da se prilikom izrade instrumenata za testiranje matematičke pismenosti pomno bira najprikladniji **oblik** pojedinog **zadatka** koji je prvenstveno povezan sa sposobnostima koje se trebaju izmjeriti (pitanje s višestrukim izborom odgovora, pitanje otvorenog tipa itd.).

U tekstu koji slijedi detaljnije ću opisati svaku od spomenutih komponenti matematičke pismenosti: sadržaj, kontekst i sposobnosti.

Matematički sadržaj — četiri sveobuhvatne ideje

Mnogi zadaci iz PISA istraživanja sastavljeni su tako da učenici trebaju povezati znanja iz raznih grana matematike kako bi uspješno došli do rješenja problema.

No, prema školskim matematičkim kurikulumima matematika je, nažalost, prikazana kao strogo, po granama razdijeljena disciplina. Tako se geometrija i aritmetika od prvog školskog dana prikazuju kao dvije potpuno odvojene discipline, toliko odvojene da učenici imaju i posebne bilježnice za njih. A kada se konačno krene s koordinatnim sustavom koji povezuje ove dvije grane, kao da nam je najveći problem koji dolazi

s njim dilema: treba li sada koordinatni sustav pisati u geometrijsku ili aritmetičku bilježnicu? Kao da nam je bilo udobnije kada su ove grane bile razdvojene. Ovakva organizacija stroge podjele se i kasnije ponavlja kroz školovanje i, iako možda olakšava poučavanje, gotovo potpuno onemogućuje učenicima doživjeti matematiku kao neprestano rastuću znanstvenu disciplinu koja se kontinuirano širi na nova polja i primjene. Učenici nisu u poziciji vidjeti sveobuhvatnije koncepte i relacije, pa se matematika pojavljuje kao kolekcija fragmentiranih dijelova činjeničnog znanja s osnovnim naglaskom na računanje i formule. S druge strane, u stvarnom svijetu rijetko imamo priliku susresti probleme koji su tako strogo podijeljeni po granama matematike.

Matematika je stoljećima bila znanost o brojevima (Egipat, Mezopotamija, Kina) ili se odnosila na prilično konkretnu geometriju (Grčka). Tome možemo dodati i arapski utjecaj u razvoju matematike, gdje je naglasak bio na tehnikama računanja u dekadskom sustavu. Većina ljudi i danas matematiku shvaća isključivo u ovom ozračju, što je krivo poimanje matematike koje je odavno prestalo biti aktualno. Matematika današnjeg vremena je aktivnost koja svakim danom sve više buja u svijetu: danas se matematika dijeli na 70-ak različitih grana. U 19. stoljeću se, primjerice, smatralo da se matematika sastoji od otprilike 12 različitih grana: aritmetike, geometrije, diferencijalnog računa, trigonometrije itd. Sličnost između ovog popisa iz 19. st. i programa u današnjoj (suvremenoj?) školi je nevjerojatna. Ako danas pokušamo definirati što je to matematika, jedan od boljih opisa bi možda bio: matematika se može shvatiti kao jezik koji opisuje modele — kako modele iz prirode, tako i modele kreirane u ljudskom mozgu. To znači da se matematički koncepti, strukture i ideje koriste za objašnjavanje i organiziranje fenomena iz prirode te socijalnog i mentalnog svijeta.

Objasniti i organizirati što više fenomena i smjestiti ih u fenomenološke kategorije, kako bi ih se opisalo modelima, nije baš jednostavno jer je domena matematike tako bogata i raznovrsna da ne bi bilo moguće ispisati tu opsežnu listu fenomenoloških kategorija (model, dimenzija, količina, neizvjesnost, oblik, promjena, prebrojavanje, zaključivanje i komunikacija, kretanje i promjena, simetrija i pravilnost, pozicija itd.). Za potrebe PISA testiranja trebalo je napraviti kvalitetan izbor od nekoliko područja ("velikih

ideja") koja bi bila dovoljno raznolika i duboka da pokriju bit matematike, a da ukazuju i na uobičajene dijelove matematičkog kurikulumu. Stoga se podjela svela na svega četiri fenomenološke kategorije:

- količina
- prostor i oblik
- promjena i odnosi
- neizvjesnost.

Koristeći ove četiri kategorije, sav matematički sadržaj može biti organiziran u dovoljan broj područja kako bismo se uvjerali u raspršenost njegovih dijelova unutar kurikulumu, ali u isto je vrijeme taj broj područja dovoljno mali da se izbjegnju ekstremno fine razlike — što bi išlo u smjeru protivnom fokusiranju na probleme iz stvarnog života. Svaka fenomenološka kategorija (količina, prostor i oblik, promjena i odnosi, neizvjesnost) pokriva opširan skup fenomena i koncepata koji se mogu naći unutar mnogih različitih situacija. Također je važno primijetiti da spomenute kategorije ideja ne mogu imati posve oštru granicu jedna prema drugoj.

Koncept fenomenološke organizacije nije nov. Dvije poznate publikacije: *On the Shoulders of Giants: New Approach to Numeracy* (Steen, 1990.) i *Mathematics: The science of patterns* (Devlin, 1994.) su već opisivale matematiku na ovaj način. Fenomenološke kategorije su se nazivale mnogim nazivima (big ideas, deep ideas, fundamental ideas, overarching concepts, problématique, major domains itd.). Za PISA istraživanje je izabran termin "overarching ideas" (sveobuhvatne ideje, viši pojmovi).

Sada ćemo se pobliže upoznati sa svakom od četiri spomenute sveobuhvatne ideje (OECD/ PISA Mathematics Framework 2003.):

Količina (Quantity)

Ova sveobuhvatna ideja količine se fokusira na potrebu kvantifikacije u svrhu organiziranja svijeta u kojem živimo. Ona uključuje razumijevanje i izražavanje što je veliko ili maleno, visoko ili nisko, malo ili mnogo, više ili manje. Tu spada i prebrojavanje koje čini početnu točku za aktivnosti računanja i izvor je za traženje dubljih modela (poput parnih i neparnih brojeva). Također, u sveobuhvatnu ideju količine spada i duljina, površina, obujam, visina, brzina, masa, tlak, novčane vrijednosti itd. Kvantitativno zaključivanje čini važan aspekt baratanja

količinom, a sadrži pojam broja, razumijevanje značenja operacija, osjećaj za veličine brojeva, pisanje i razumijevanje matematički elegantnog računa, te vježbanje mentalne aritmetike i procjene. OECD ističe kako bi se upravo vještinama procjene trebala dati velika važnost jer je ona moćno kvantitativno oružje matematički pismenog građanina. Evo primjera PISA zadatka koji se odnosi na sveobuhvatnu ideju količine, upravo u domeni procjene.

Primjer 3. ROCK KONCERT

Za potrebe rock koncerta predviđen je prostor za publiku pravokutnog oblika dimenzija 100 m × 50 m. Koncert je bio potpuno rasprodan, a teren do kraja ispunjen obožavateljima koji su svi stajali.

Koji od ponuđenih odgovora prikazuje najbolju procjenu broja posjetitelja koncerta?

- A. 2 000 B. 5 000 C. 20 000
D. 50 000 E. 100 000

Prostor i oblik (Space and shape)

Pojam *oblik* u matematici ima vrlo važno značenje. Između ostalog, oblik je s jedne strane snažno povezan s tradicionalnom geometrijom, ali, s druge strane, on daleko nadmašuje te okvire. Prepoznavanje oblika iz stvarnosti odnosi se na razumijevanje i opisivanje vizualnog svijeta oko nas. Kako bi razumjeli koncept oblika, učenici bi, primjerice, trebali pronaći sličnosti i razlike između oblika, analizirati različite komponente objekta i prepoznavati oblike u različitim dimenzijama i prikazima. Važno je naglasiti da oblike ne treba shvaćati statično, već se oni mogu transformirati, što se danas lako može predočiti pomoću programa dinamičke geometrije.

Geometrijski uzorci mogu služiti kao relativno jednostavni modeli za mnoge fenomene, i njihova studija je poželjna na svim razinama (Grünbraun, 1985.). U studiji oblika i konstrukcija gledamo sličnosti i razlike analizirajući komponente oblika i prepoznavamo oblike u različitim prikazima i u različitim dimenzijama. Studija oblika je usko povezana s konceptom “poimanja prostora” (*grasping space*, Freudenthal, 1973.) — učenjem kako upoznati, istražiti i osvojiti da bi se živjelo, disalo i kretalo, kako bismo još više razumjeli prostor u kojem živimo.

Ključni aspekti ideje prostora i oblika su: prepoznavanje oblika i modela, opisivanje i razumijevanje vizualne informacije, razumijevanje dinamičkih promjena oblika, sličnosti i razlike, relativni položaji, dvo- i trodimenzionalni prikazi te odnosi među njima, navigacija kroz prostor.

Primjerice, traži se razumijevanje odnosa između oblika i slika (ili vizualnih prikaza) kao npr. između stvarnog grada i fotografija ili mapa istog grada, sposobnost crtanja karte, razumijevanje pojma perspektive, crtanje trodimenzionalnih predmeta u raznim projekcijama itd.

Primjer: u zadatku sa svjetiljkom u parku (Primjer 1.) potrebno je geometrijsko znanje povezano s idejama prostora i oblika.

Promjena i odnosi (Change and relationships)

Svaki prirodni fenomen je manifestacija promjene, i u svijetu oko nas se mogu pronaći mnogi trenutni i stalni odnosi među fenomenima: organizmi se mijenjaju kako rastu, cikličko mijenjanje godišnjih doba, plima i oseka, cikličke nezaposlenosti, vremenske promjene, valutne promjene itd. Neki od ovih procesa promjena se mogu modelirati strogim matematičkim funkcijama: linearnim, eksponencijalnim, periodičnim ili logičkim, diskretnim ili kontinuiranim. No, mnogi odnosi spadaju u drugu kategoriju gdje je često potrebna analiza podataka da se objasni vrsta prikazanih odnosa. Matematički odnosi također često imaju oblik jednadžbi ili nejednadžbi, ali se mogu pojaviti i relacije općenitije prirode (npr. ekvivalencija, djeljivost).

Funkcionalno mišljenje — tj. razmišljanje o odnosima — je jedan od osnovnih disciplinarnih ciljeva poučavanja matematike. Odnosi mogu donijeti mnoštvo različitih prikaza, uključujući simboličan, algebarski, grafički, tabelaran ili geometrijski prikaz. Prevođenje iz jednog prikaza u drugi je često od ključne važnosti u rješavanju matematičkih situacija.

Primjer: zadatak s otkucajima srca (Primjer 2.) odnosi se na sveobuhvatnu ideju promjene i odnosa jer su zadani podaci prikazani u obliku jednadžbi, a jednadžbe prikazuju određene odnose između zadanih objekata (preporučeni maksimalni broj otkucaja srca i godine).

Neizvjesnost (Uncertainty)

Naše informacijom vođeno društvo nudi obilje podataka, često prikazanih u obliku točnih i znanstvenih činjenica. Ali, u svakodnevnom životu se susrećemo s neizvjesnim rezultatima izbora, urušenjima mostova, padom burzi, nepouzdanim vremenskim prognozama, lošim predviđanjima rasta populacije, ekonomskim modelima koji se ne mogu primijeniti, te mnogim drugim primjerima neizvjesnosti u svijetu. Neizvjesnost ima namjeru ukazati na dvije povezane teme: podatke i šansu, fenomene koji su predmeti matematičke studije u statistici, odnosno vjerojatnosti. Nedavne preporuke, koje se odnose na školske kurikulume, vrlo jasno potiču statistiku i vjerojatnost kako bi stekle još istaknutije mjesto nego što su imale u povijesti (Cockroft, 1982.; LOGSE, 1990.; MSEB, 1993.; NCTM, 2000.). Posebni matematički koncepti i aktivnosti koji su važni u ovom području uključuju prikupljanje podataka, analizu podataka, prikaz podataka i vizualizaciju, te vjerojatnost i zaključivanje.

Evo primjera koji pripada ovoj sveobuhvatnoj ideji.

Primjer 4. PROSJEČNA STAROST

Ako je 40% stanovništva neke zemlje staro najmanje 60 godina, je li tada moguće da prosječna starost ukupnog stanovništva bude 30 godina?

U ovom poglavlju bile su prikazane ideje koje se odnose na matematički sadržaj unutar PISA zadatka. Proučimo sada detaljnije kontekste u koje su stavljeni PISA zadaci.

Kontekst i situacija

Važna komponenta matematičke pismenosti je korištenje matematike u različitim situacijama iz stvarnosti jer konteksti igraju glavnu ulogu pokretača testiranja cjelokupnog uvida, razumijevanja i konceptata. Pritom je potrebna što veća raznovrsnost konceptata kako bi se mogućnosti karakterizacije zadataka i fenomena, koji nisu kulturno relevantni, svele na minimum.

Udaljenost od učenika

Situacija prikazana u zadatku je smještena na određenoj **udaljenosti** od učenika. Prema OECD/PISA-inom glavnom nacrtu, situacija najbliža

učeniku je ona vezana uz njegov osobni život (svakidašnji život); sljedeća malo udaljenija situacija je ispitanikov školski život, posao i sport; zatim slijedi lokalna zajednica i društvo uključeno u svakidašnji život. Najdalje (s najvećom udaljenošću) nalaze se znanstvene situacije. Na ovaj način možemo definirati više ili manje kontinuiranu skalu koja je potrebna za definiranje i kreiranje PISA zadataka. Tako su definirane četiri vrste situacija (osobne, školske, javne i znanstvene situacije) koje se mogu pronaći u PISA zadacima i o kojima se vodi računa prilikom sastavljanja PISA zadataka.

Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 5. ŠTEDNJA

1000 zeda je stavljeno u banku na štednju. Pritom su na raspolaganju dvije mogućnosti: možemo se odlučiti za godišnju kamatnu stopu od 4% ILI možemo odmah dobiti 10 zeda bonusa od banke i kamatnu stopu od 3% godišnje. Koja opcija se više isplati za razdoblje od jedne godine? Koja se više isplati za razdoblje od dvije godine?

Situacija u ovom zadatku se odnosi na bankarstvo i financije, dakle, radi se o situaciji iz lokalne zajednice. PISA ovu situaciju klasificira kao javnu. Kontekst ovog zadatka uključuje novac (zed) i postotke štednje.

Evo još jednog primjera: problem iz Primjera 2. (Otkuaj srca) situaciju klasificira kao javnu/osobnu jer se s jedne strane radi o javnoj situaciji, a s druge strane mnogi ljudi (džogeri, biciklisti i drugi sportaši) zaista mjere otkucaje srca i stoga se situacija može također shvatiti i kao osobna.

No, naravno, ne možemo izmjeriti udaljenost od konteksta za svakog učenika posebno, stoga trebamo napraviti određene pretpostavke. Pretpostavki ima mnogo i raznovrsne su. Primjerice, jedna od pretpostavki jest da bi udaljenost od određenog konteksta mogla biti drukčija za dječake i djevojčice. Istraživanje sugerira da su dječaci bolji u eksperimentalnom znanju s brojevima i mjerenjima iz svakodnevnog života, dok se djevojčice, čini se, bolje snalaze u zadacima gdje je potreban standardni algoritam ili postupak. De Lange (2005.) naglašava dalje kako komponenta konteksta/ situacija u matematičkoj pismenosti nije dovoljno istražena. Primjerice, nije jasno kako spomenute udaljenosti od konteksta utječu na učenikovo rješavanje zadataka.

Ovi aspekti trebaju daljnje studije, dosadašnji rezultati nisu konačni u smislu da možemo reći da su “bliži” konteksti atraktivniji učenicima ili prikladniji u zadacima od onih znanstvenijih.

U PISA zadacima postoje i “čisto” matematički zadaci, iako je njihov broj ograničen. To su zadaci koji se odnose samo na matematičke objekte, simbole i strukture, i koji ne izlaze izvan matematičkog svijeta. Tada se situacija naziva znanstvenom i predstavlja najveću udaljenost od učenika. Takvi zadaci se nazivaju intra-matematički zadaci. Za razliku od njih, tzv. ekstra-matematički zadaci su oni koji su stavljeni u određeni kontekst i koje učenik (procesom *matematizacije*) treba prevesti u matematički oblik kako bi ih riješio.

Važnost i uloga konteksta

Konteksti u zadatku mogu biti prisutni samo zato da zadatak učine sličnim zadatku iz svakodnevnog života. To je tzv. lažni kontekst, kamuflažni kontekst, kontekst “nultog reda”. Ako je moguće, treba izbjegavati takva korištenja.

Korištenje konteksta “prvog reda” se sastoji u tome da kontekst bude pouzdan i potreban za rješavanje problema i prosuđivanje odgovora. To znači da je zadatak već zadan matematičkim jezikom.

Korištenje konteksta “drugog reda” se pojavljuje kada pojedinac zaista treba *matematizirati* problem kako bi ga riješio i kada treba promisliti o odgovoru prilikom prosuđivanja točnosti svog odgovora. Stoga razlika između korištenja konteksta prvog i drugog reda leži u ulozi procesa *matematizacije*. U kontekstu prvog reda imamo već *prematematiziran* problem (zadatak je intramatematički), dok je u drugom veći naglasak stavljen na taj proces *matematizacije* (zadatak je ekstra-matematički).

Vrste konteksta

Jasno je, ako stavimo naglasak na matematičko obrazovanje, koje će potaknuti intelektualni razvoj i informiranost građana, tada ćemo se morati pozabaviti svim vrstama stvarnih konteksta. Moramo se, primjerice, baviti problemima zagađenja, sigurnosti u prometu, rastom stanovništva itd. No, znači li to da moramo izuzeti umjetne i virtualne koncepte? Odgovor je ne, ali pritom trebamo biti svjesni razlika.

Gore bi spomenuti problem sa štednjom (Primjer 5.) mogao biti dio stvarnog iskustva ili prakse u nekoj postavci iz stvarnog svijeta. Ovdje se stoga radi o *autentičnom kontekstu* za korištenje matematike budući da je primjena matematike u ovom kontekstu povezana s rješavanjem problema. Naglasimo da se naziv “autentičan” ne odnosi na ukazivanje da su matematički sadržaji stvarni (naprotiv, novac po imenu *zed* je izmišljen). OECD/PISA koristi pojam “autentičan” da ukaže kako je korištenje matematike zaista usmjereno rješavanju problema, jer problem nije samo sredstvo za uvježbavanje nekog matematičkog gradiva. Za razliku od autentičnog konteksta, u matematičkim udžbenicima se često susrećemo sa zadacima čija je glavna svrha uvježbavati matematiku, umjesto da se češće uči matematika kao sredstvo za rješavanje problema. Ova autentičnost je vrlo važna prilikom kreiranja PISA zadataka i usko je povezana s definicijom matematičke pismenosti.

Spomenimo još jednom da u problemu sa štednjom (Primjer 5.) ima i izmišljenih elemenata, iako se njegov kontekst okarakterizirao kao *autentičan*. Naime, spomenuti novac *zed* je izmišljen zbog otklanjanja prednosti učenika ispitanika kojima bi zadana valuta njihove zemlje bila poznata, dok bi drugima bila nepoznata. Time bi udaljenost od konteksta u startu bila različita za učenike iz različitih zemalja.

Virtualni kontekst sadrži elemente koji nisu opisani bilo kojom fizikalnom, socijalnom, praktičnom ili znanstvenom stvarnošću. Njihova priroda je idealizirana, stilizirana ili generalizirana. Primjerice, stilizirani prikaz mape ulica grada G sadrži idealizirani zadatak s prometom, jedino što je stvarno u tom kontekstu su riječi “ulica”, “grad” i “promet” — dok sâm grad, ulice i promet nisu ni stvarni ni autentični, već virtualni.

Umjetni kontekst se bavi, primjerice, bajkama — nepostojećim objektima i konstrukcijama. Ovu vrstu konteksta je lakše odvojiti od stvarnosti i treba je koristiti s oprezom. Učenici se neće moći uvijek uživjeti u takve fantazije unutar umjetne postavke zadatka ili se uklopiti u svijet koji očito nije stvaran. Ali ponekad je ipak opravdana uporaba ovih situacija.

Za sve uporabe konteksta uvjeti moraju biti takvi da imaju matematičke karakteristike i da nam omogućuju analizu sustava i situacija.

Nastavak u sljedećem broju.