# Suma $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

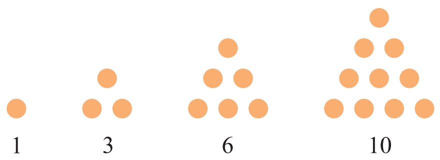
**Branimir Dakić,** *Zagreb*

Zanimljivo je kako se zbrajanje $n$ uzastopnih prirodnih brojeva i formula

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

mogu primijeniti u raznovrsnim matematičkim zadacima. Naravno, u rezultatu $\frac{n(n+1)}{2}$ prepoznat ćemo binomni koeficijent $\binom{n+1}{2}$ pa zaključujemo da je zbroj prvih $n$ uzastopnih prirodnih brojeva jednak broju kombinacija drugog razreda bez ponavljanja u skupu od $n+1$ elemenata. Zato se ova činjenica može iskoristiti da se odgovarajući zadaci prebrajanja kombinacija svedu na zbrajanje $n$ uzastopnih prirodnih brojeva. Jer ako je riječ o nižem uzrastu, recimo, o učenicima osnovnih škola, onda ovaj postupak ima smisla, pogotovo jer se nadograđuje na određivanje zbroja $S_n$ poznatom **Gaussovom dosjetkom**.

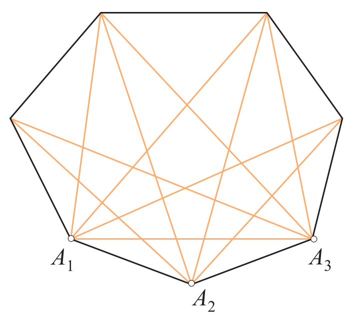
U uvodu još spomenimo kako su parcijalne sume reda $n$ uzastopnih prirodnih brojeva tzv. **trokutasti brojevi**. Promotrimo nekoliko sljedećih sličica:




Ove sličice ilustriraju zbog čega se brojevi 1, 3, 6, 10, 15, ... zovu trokutastim.

U jednom dijelu zadataka iz kombinatorike kao ključni model za njihovo rješavanje može poslužiti sljedeći zadatak prebrajanja dijagonala mnogokuta.

**Primjer 1.** Koliko dijagonala ima konveksni mnogokut?




*Rješenje*. Krenimo od vrha $A_1$ mnogokuta. Iz njega možemo izvući $n-1$ spojnicu s ostalih $n-1$ vrhova. Sljedeći vrh $A_2$ s ostala $n-2$ vrha možemo povezati s $n-2$ spojnice. Iz trećeg vrha $A_3$ povlačimo $n-3$ spojnice, itd.

Ukupno je $n$ vrhova mnogokuta međusobno povezano s

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

spojnica. No u ovom je broju sadržan i broj stranica mnogokuta pa taj broj valja oduzeti.

Ukupan je broj dijagonala onda jednak

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Primijenimo rezultat ovog primjera na nekoliko sljedećih zadataka.

**Primjer 2.** *Teniski turnir.* Na nekom teniskom turniru sudjeluje deset igrača i svaki sa svakim igra po jedan susret. Koliko će se ukupno susreta odigrati na tom turniru?

*Rješenje.* Nacrtamo deseterokut i svakom njegovom vrhu pridružimo ime jednog igrača. Prema rješenju prethodnog primjera ukupan je broj mečeva jednak broju spojnica kojima se mogu povezati vrhovi mnogokuta: $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$.

**Primjer 3.** *Zadatak o rukovanju.* Dvadeset se prijatelja nađe na proslavi obljetnice mature i svaki se rukuje sa svakim. Koliko je bilo rukovanja pri susretu starih prijatelja?

**Primjer 4.** *Slatki zadatak.* U slastičarnici je 11 vrsta sladoleda. Ako svaki dan jedanput svratimo u slastičarnicu i svaki put uzmemo dvije kuglice različitog okusa, nakon koliko će se dana prvi put pojaviti *kombinacija* dviju kuglica koju smo već kušali?

*Rješenje.* Uočavate li da je ovaj zadatak zapravo jednak kao i tri prethodna?

Zaključujemo na sljedeći način:

prvoga dana s kuglicom okusa $s_1$ uzmemo kuglicu nekog od preostalih 10 vrsta sladoleda. Sljedećeg dana uz $s_1$ odaberemo kuglicu jednog od 9 preostalih okusa itd. Očito, kuglicu okusa $s_1$ možemo lizati (s nekom od 10 kuglica ostalih 10 okusa) 10 dana. Ponovimo zaključivanje za sladoled okusa $s_2$ i s njom možemo kombinirati svaki od preostalih 9 okusa. I tako dalje. Ukupan je broj mogućnosti jednak

$$10 + 9 + \ldots + 3 + 2 + 1 = 55.$$

Slatki užitak uz opisane uvjete trajat će $\dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55$ dana.

**Primjer 5.** *Tablica množenja.* Koliki je zbroj svih brojeva u tablici množenja $10 \times 10$ u dekadskom brojevnom sustavu?

*Rješenje.*

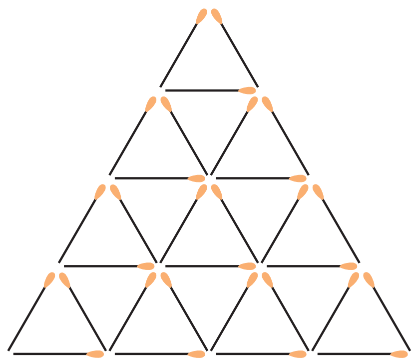
| $\times$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

Razmotrimo tablicu množenja $5 \times 5$ pa onda taj rezultat proširimo na bilo koju tablicu množenja u sustavu brojeva s bazom 10.

Lako ćemo uočiti da je:
$S_n = (1+2+3+4+5) + 2\cdot(1+2+3+4+5) + 3\cdot(1+2+3+4+5) + 4\cdot(1+2+3+4+5) + 5\cdot(1+2+3+4+5) = (1+2+3+4+5)\cdot(1+2+3+4+5) = (1+2+3+4+5)^2 = 225.$

Potpuno analogno, naći ćemo da je zbroj svih brojeva u tablici množenja $10 \times 10$ jednak $(1 + 2 + 3 + \ldots + 10)^2 = 3\,025$.

**Primjer 6.** *Prvi zadatak sa šibicama.* Ako slažemo šibice tako da dobijemo konfiguraciju kao na slici, koliko će nam šibica trebati ako se na svakom rubu velikog trokuta nalazi 100 šibica?



*Rješenje.* Promatrajući sliku brzo ćemo zaključiti da se od trokuta s $n$ šibica na rubu dodavanjem $n + 1$ trokuta ili $3n + 1$ šibica dolazi na trokut s $n + 1$ šibicom.

Više nego u udžbeniku

I tako, krene li se s jednim trokutom, broj šibica raste, te je redom:

$$3,\ 3+2\cdot 3=9,\ 9+3\cdot 3=18,$$
$$18+4\cdot 3=30,\ 30+5\cdot 3=45,\ldots.$$

Niz brojeva 3, 9, 18, 30, 45, ... je niz trostrukih trokutastih brojeva pa možemo pretpostaviti da je ukupan broj šibica u $n$-tom slučaju jednak $3\cdot T_3(n)$, gdje je s $T_3(n)$ označen $n$-ti trokutasti broj.

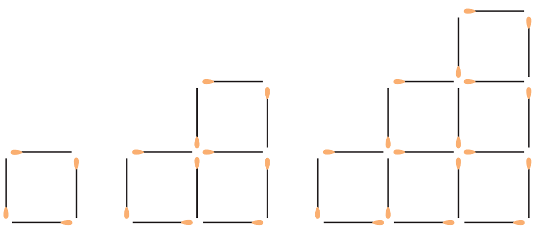
Kako pretpostavka vrijedi za $n=1$ i kako je

$$\begin{aligned} T_3(n+1) &= 3.\cdot T_3(n)+3(n+1) \\ &= 3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+3\cdot(n+1) \\ &= 3\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= 3\cdot T_3(n+1), \end{aligned}$$

ta se pretpostavka potvrđuje.

Ako je na svakom rubu po 100 šibica, onda je u cijeloj konfiguraciji ukupno $3\cdot\dfrac{100\cdot 101}{2}=$ 15 150 šibica.

**Primjer 7.** *Drugi zadatak o šibicama.* Ako od šibica slažemo konfiguracije kao na sličicama, koliko ćemo šibica utrošiti na $n$-tu konfiguraciju po redu?



*Rješenje.* Promatramo li redom složene konfiguracije, vidimo da prijelazom od prve na drugu dodajemo 6, od druge na treću 8, od treće na četvrtu 10, od četvrte na petu 12 šibica.

Zaključujemo da će $n$-ta po redu konfiguracija imati

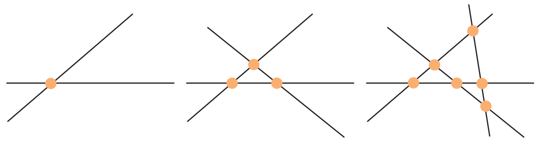
$$4+6+8+10+\ldots+(2n+2)$$

šibica.

Taj je zbroj jednak $2\cdot(2+3+4+\ldots+(n+1))=2\cdot[(1+2+3+\ldots+n)+n]=2\cdot\left[\dfrac{n(n+1)}{2}+n\right]=n(n+1)+2n=n(n+3).$

**Primjer 8.** Od $n$ pravaca nikoja tri ne prolaze jednom točkom niti su koja dva međusobno paralelna. Kažemo da su ti pravci u općem položaju. U koliko se točaka siječe tih $n$ pravaca?

*Rješenje.* Krenimo s promatranjem pojedinačnih slučajeva, od $n=1$ nadalje, i pokušajmo izvući zaključak na temelju nepotpune indukcije.



1 3 6

Dva se pravca sijeku u jednoj točki, tri u $1+2=3$ točke, četiri u $1+2+3=6$ točaka, pet u $1+2+3+4=10$ točaka itd.

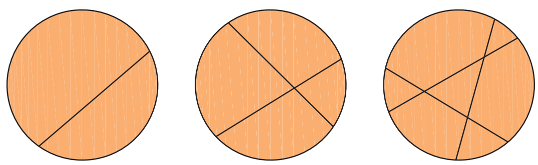
Možemo pretpostaviti: ako imamo $n$ pravaca, oni se sijeku u $S_n=1+2+3+\ldots+(n-1)=\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$ točki.

Tu činjenicu možemo provjeriti na sljedeći način: ubacimo još jedan pravac koji svaki od $n$ prethodnih pravaca siječe u po jednoj točki te je ukupan broj sjecišta jednak

$$S_{n+1}=S_n+n=\frac{(n-1)\cdot n}{2}+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Pretpostavka je ovime potvrđena.

**Primjer 9.** Ako u krugu povučemo $n$ tetiva u općem položaju (nikoje dvije nisu paralelne i nikoje tri ne prolaze jednom točkom), na koliko će dijelova (regija) one podijeliti krug?



2 4 7

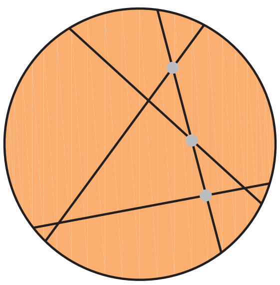
*Rješenje.* Nacrtajmo nekoliko prvih posebnih slučajeva, kada je broj ($n$) tetiva jednak 1, 2, 3, 4. Prebrojimo u svakom pojedinom primjeru dijelove na koje tetive sijeku krug.

Redom dobivamo sljedeće brojeve: 1, 2, 4, 7,.... Primjećujemo da su to, počevši s drugim po redu, trokutasti brojevi uvećani za 1.

Tako onda možemo pretpostaviti rješenje zadatka: *neka je u nekom krugu povučeno $n$ tetiva u općem položaju. Tada tih $n$ tetiva krug dijeli na $r_n = T_n + 1$ dijelova (regija).*

Provjerimo ovu pretpostavku.

Neka $n$ tetiva u općem položaju dijeli krug na $r_n = T_n + 1$ regija, gdje je s $T_n$ označen $n$-ti trokutasti broj. Ubacimo li novu tetivu, koja neće narušiti općenitost položaja, ona će svaku od $n$ prethodnih tetiva presjeći u $n$ točaka koje će na novoj tetivi odrediti $n+1$ dužinu.



Svaka od tih $n+1$ dužina dijeli svaku regiju kroz koju prolazi na dva dijela, čime nastaje prirast od $n+1$ regije u odnosu na prethodni broj.

Dakle,

$$r_{n+1} = r_n + n + 1.$$

Ovom **rekurzivnom jednadžbom** dano je rješenje zadatka. Uvrstimo u nju umjesto $n$ redom brojeve od 1 do $n+1$ i dobijemo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + 2 \\ r_3 &= r_2 + 3 \\ r_4 &= r_3 + 4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n &= r_{n-1} + n \\ r_{n+1} &= r_n + (n+1). \end{aligned}$$

Kad sve ove jednakosti zbrojimo, dobijemo:

$$r_{n+1} = r_1 + (2+3+\ldots+(n+1)) = 1 + T_{n+1}.$$

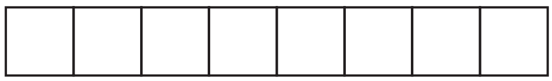
Time je potvrđen rezultat koji smo ranije pretpostavili nepotpunom indukcijom.

**Primjer 10.** *Problem šahovske ploče.* Koliko je pravokutnika na šahovskoj ploči ako su ti pravokutnici složeni od kvadratića iste ploče?

*Rješenje.* Ovaj stari i vrlo poznati zadatak pruža čitav niz mogućnosti pristupa svojem rješavanju. Možda je baš zato i postavljen kao primjer didaktički vrijednog problema u časopisu *Principles and Standards for School Mathematics 2000*, namijenjenom uzrastu od 9. do 12. razreda.

Navedimo ipak barem dva rješenja, od kojih neka prvo bude primjereno uzrastu osnovne škole.

Razmotrimo najprije traku $8 \times 1$, s osam kvadratića u nizu.



Na toj je traci 8 kvadratića $1 \times 1$, 7 je pravokutnika s dvama kvadratićima, 6 pravokutnika s trima kvadratićima itd. Konačno, i sama je traka jedno rješenje.

U ovom jednostavnom slučaju imamo, dakle, ukupno $8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$.

Uzmimo sada traku širine dva, dakle $8 \times 2$. Ona se sastoji od dviju traka širine 1 na kojima je ukupno $2 \cdot (8+7+6+\ldots+1)$ pravokutnika.

Isto toliko pravokutnika možemo izbrojiti i na traci širine 2: osam pravokutnika $1 \times 2$, sedam $2 \times 2$, šest $3 \times 2$, itd.

I sada zbrajamo: osam je traka širine 1, na njima je $(1+2+3+\ldots+8) \cdot 8$ pravokutnika. Sedam je pravokutnika širine 2 i na njima je $(1+2+3+\ldots+8) \cdot 7$ pravokutnika. Na šest traka širine tri ukupno je $(1+2+3+\ldots+8) \cdot 6$ pravokutnika itd.

Dakle, ukupan je broj pravokutnika na šahovskoj ploči jednak $(1+2+3+\ldots+8)\cdot(1+2+3+\ldots+8)=36\cdot 36=36^2$.

Jednostavno je također zaključiti da je na svakoj kvadratnoj šahovkoj ploči $n\times n$ ukupan broj svih pravokutnika jednak

$$(1+2+3+\ldots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

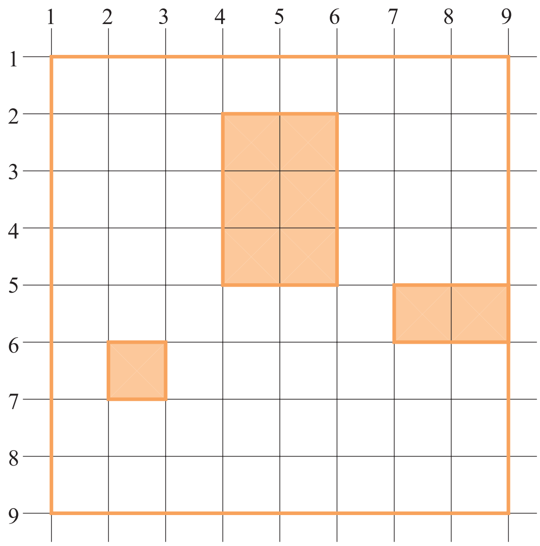
Lako je također zaključiti kako je na bilo kojoj šahovskoj ploči $m\times n$ ukupno

$$\frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

pravokutnika.

Ako bismo htjeli ići prema daljnjim poopćenjima, tada bismo mogli postaviti analogan problem za trodimenzionalan prostor.

No vratimo se ipak još na trenutak početnom zadatku. Uzmimo dva niza od po $n$ međusobno okomitih pravaca koji tvore pravokutnu mrežu. Tada naš zadatak možemo preformulirati u pitanje: koliko pravokutnika ima vrhove u sjecištima tako dobivene cjelobrojne pravokutne mreže?




Razmotrimo zadatak na dijelu te mreže koji je apstraktna slika šahovske ploče. Neka je, dakle, $n=9$.

Pojedini pravokutnik sjecište je dviju pruga, jedne horizontalne i jedne vertikalne. No svaka je horizontalna pruga određena dvama brojevima pridružena pravcima koji određuju prugu. Taj je broj, ukupan broj horizontalnih pruga, za naš kvadrat $8\times 8$ jednak $\binom{9}{2}$. No isto vrijedi i za svaku vertikalnu prugu.

Izbor po jedne horizontalne i jedne vertikalne pruge određuje pravokutnik i zato je ukupan broj pravokutnika $8\times 8$ jednak $\binom{9}{2}^2$.

Sada nije nikakav problem i na ovaj način provoditi poopćenja poput onih kakva su već provedena uz prvi dio rješenja zadatka.

**Napomena.** Zbrajanje aritmetičkih nizova u kojima su članovi prirodni brojevi posebno je zanimljiva tema. Tako je primjerice u američkom časopisu *Mathematics Teacher* u broju 5. za siječanj 2005. g. objavljen članak *That Ubiquitous Sum:* $1+2+3+\ldots+n$, u kojem autori *Stanley J. Bezuszka* i *Margaret J. Kenney* obrađuju nekoliko zadataka u čija je rješenja ugrađena ova jednostavna suma. Oni, uz neke ostale probleme, rješavaju i problem vezan uz dokaz prebrojivosti skupa racionalnih brojeva. Naime, jedna od varijanti čuvenog **Cantorova dijagonalnog postupka** je njegovo provođenje u cjelobrojnoj koordinatnoj mreži, gdje se racionalni brojevi identificiraju s cjelobrojnim točkama te se ispisuju u niz. U spomenutom se članku između ostalog traži odgovor na pitanje *kako odrediti redni broj nekog razlomka* $\frac{m}{n}$ *u takvom popisu.*

* * *