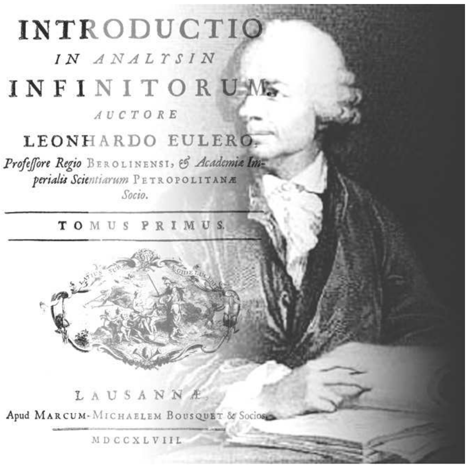
Leonhard Euler – 2. dio
(1707. – 1783.)

Branimir Dakić, *Zagreb*

"Euler je računao bez vidljiva napora, onako kako čovjek diše ili kako se orao održava na vjetru."

François Arago (1786. – 1853.), francuski znanstvenik

Matematička analiza bila je glavno područje djelovanja matematičara u 18. stoljeću. Posebice su Bernoullijevi svojim radovima bitno utjecali na razvitak ove bazične grane matematike. Eulerova bliskost s tom matematičkom obitelji potaknula je Eulerov interes za analizu pa je ona dugo bila središnja točka njegova interesa i rada. Zbog toga je i prva u nizu sjajnih Eulerovih knjiga bila dvotomni *Introductio in analysin infinitorum* (1748.).


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiae Imperialis Scientiarum PETROPOLITANAE Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNAE,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Prvi je dio ovog opsežnog djela posvećen beskonačnim procesima. Tu su dani prikazi funkcija u obliku beskonačnih redova, navedeni su limesi nekih beskonačnih umnožaka, obrađuju se verižni razlomci, razni algebarski i trigonometrijski redovi itd.

Promatrajući jednostavan harmonijski red

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots .$$

Euler uočava kako je zbroj prvih n pribrojnika približno jednak $\log n$. Štoviše, dokazao je da kada n raste, razlika između zbroja prvih n pribrojnika i $\log n$ teži konstanti koja se zove *Eulerova konstanta*. Euler ju je 1781. izračunao na 16 decimala, a njezina je približna vrijednost

$$0.57721566490153286060651209008240243.$$

Isti broj ponekad se zove *Mascheronijeva konstanta*. Broj je i danas prilična nepoznanica, o njemu se malo zna, čak nema dokaza niti da je iracionalan.[1]

Koncept konvergencije beskonačnih redova bio je razrađen i prije Eulera. No on je bio zbunjen nekim tvrdnjama i rezultatima pa se

[1] Često se Eulerovom konstantom zove broj $e = 2.71828\ldots$

Objletnice

u ovo područje upustio, krčeći mnoge nedoumice. Može se reći kako su upravo radovi iz područja beskonačnih redova bili ti koji su doprinijeli punoj Eulerovoj afirmaciji i njegovu ugledu u svijetu matematičara. Posebice se ističe problem određivanja beskonačne sume $S(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, problem kojim su se zdušno bavili Bernoullijevi, Leibniz, Stirling, De Moivre i drugi.

Euler je znao za osnovni poučak algebre koji kaže da svaka algebarska jednadžba n-tog stupnja $f(x) = 0$ ima n korijena, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, te se može napisati u obliku

$$a(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = 0.$$

Također je znao da jednadžba $\sin x = 0$ ima beskonačno mnogo rješenja iz čega onda izvodi prikaz funkcije sinus u obliku beskonačnog umnoška

$$\sin x = Ax\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots .$$

Euler je znao i za prikaz sinusa u obliku beskonačnog reda oblika

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots .$$

Kako bi odredio koeficijent A služi se činjenicom da $\sin x$ teži x kada x teži nuli (što se može zaključiti i iz prethodnog razvoja sinusa u red). Dobije se $A = 1$.

Kada se izjednače koeficijenti uz x^3 i x^5 u prethodna dva zapisa funkcije sinus, dobije se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Iz ovakvih, relativno jednostavnih redova možemo odrediti po volji mnogo znamenki broja π.

Za eksponencijalnu funkciju baze e Euler daje raspis:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Uvrstimo li $x = 1$ dobit ćemo čuveni *Eulerov broj* $e = 2.71828182846\ldots$, osnovicu prirodnih logaritama.

Istraživanja beskonačnih redova dovode Eulera i do *verižnih razlomaka*. On dokazuje kako se svaki racionalan broj može prikazati kao konačan verižni razlomak. Dao je brojne primjere verižnih razlomaka, kao što je primjerice

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}.$$

Spomenimo još da je Euler dokazao da je broj e iracionalan.

Euler definira eksponencijalnu funkciju i na skupu kompleksnih brojeva te je povezuje s trigonometrijskim funkcijama. Za bilo koji realni broj x vrijedi

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

što je poznato kao *Eulerova formula*. No *Eulerovim formulama* zovu se i izrazi

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

i

$$\sin x = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

koji izravno proistječu iz te formule.

Iz iste formule proistječe čuvena jednakost

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

koju mnogi, budući da ona povezuje pet krucijalnih matematičkih konstanti $e, 1, i, \pi$ i 0, drže *najljepšom jednakošću cijele matematičke znanosti*.

Euler je dao i čuvenu formulu, koja se danas uglavnom pripisuje Abrahamu de Moivreu:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Euler se bavio transcedentnim funkcijama i hiperboličkim trigonometrijskim funkcijama. Jedan je od začetnika *Teorije funkcija kompleksne varijable* (definirao je logaritme negativnih i kompleksnih brojeva).

Baveći se problemima ekstremnih vrijednosti funkcija razvio je *račun varijacija*. Kao zasebnu disciplinu formirao je *Teoriju običnih diferencijalnih jednadžbi*.

Moglo bi se nastaviti s nabrajanjem, ali i ovo je već bilo previše kad je riječ o opisu Eulerovih radova koji nemaju doticaja sa školskom matematikom. Nastavak će svakako biti u tom smislu zanimljiviji učiteljima i nastavnicima matematike.

* * *

Euler je bio vrlo svestran ali čini se kako je **teorija brojeva** bila njegova mladenačka strast. Tri toma Eulerovih sabranih djela (*"Opera omnia"*) posvećeno je teoriji brojeva.

Sve je počelo njegovim dolaskom u Rusiju 1727. godine. Tamo je upoznao Christiana Goldbacha koji je već imao bogato iskustvo u ovom području matematike. Goldbach je proučavajući razne izvore, prije svega Euklidove *Elemente* i radove Fermata pokušavao naći odgovore na neka otvorena pitanja. Jedno od njih je poznato kao *Goldbachova hipoteza*: svaki paran prirodni broj dade se predočiti u obliku zbroja dva prosta broja.

Drugo veliko pitanje bilo je vezano uz **savršene brojeve**. To su prirodni brojevi koji su jednaki zbroju svojih djelitelja manjih od samih brojeva. Brojevi $6 = 1 + 2 + 3$ i $28 = 1+2+4+7+14$ primjeri su savršenih brojeva. Za savršene brojeve vrijedi sljedeći poučak:

Ako je $2^k - 1$ prost broj i ako je

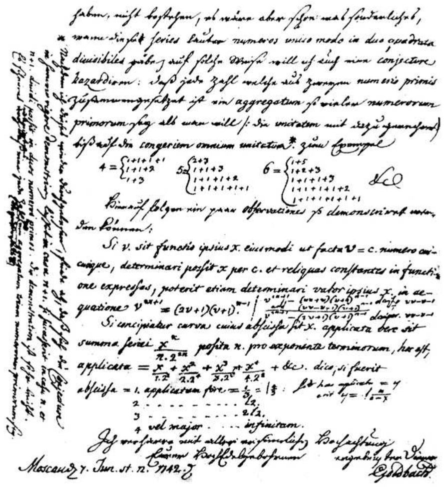
$$n = 2^{k-1}(2^k - 1),$$

tada je n savršen broj.

No kada je $2^k - 1$ prost? Za koje k? To naoko jednostavno pitanje pokazalo se vrlo složenim. Pomisao kako je $2^k - 1$ prost broj ako je k prost bila je pogrešna. Vidimo to već na primjeru broja $2^{11} - 1$ jer je $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \cdot 89$.

Počela je potraga za takvim prostim k za koje $2^k - 1$ jest prost (*Mersenneovi brojevi*)[2]. Uslijedile su računske provjere koje su s porastom k postajale sve mukotrpnije. Euler je 1772. pokazao da je broj $2^{31} - 1$ prost.

Goldbach se u međuvremenu preselio u Moskvu i dopisuje se s Eulerom razmjenjujući izvjesna pitanja i rješenja. U pismu od 1. prosinca 1729. pita:



Goldbachovo pismo Euleru

Je li Vam poznato Fermatovo mišljenje da su brojevi oblika $2^{2^p} + 1$ *prosti? On to nije dokazao a koliko znam nije niti itko drugi.*

Euler je brzo odgovorio:

$$2^{2^5} + 1 = 6\,700\,417 \cdot 641.$$

Dakle, Fermat nije u pravu. Eulerov entuzijazam raste i on se sve više udubljuje u probleme teorije brojeva. Razmatra parove **prijateljskih brojeva**.

Kakvi su to brojevi?

Neka je $\sigma(n)$ zbroj svih cjelobrojnih djelitelja broja n. Primjerice,

$$\sigma(5) = 1 + 5 = 6,$$
$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12, \text{ itd.}$$

Brojevi m i n su par prijateljskih brojeva ako i samo ako je

$$\sigma(m) = m + n = \sigma(n).$$

Uzmimo brojeve $m = 220$ i $n = 284$. Tada je:

$$m = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 + 220 = 504,$$
$$n = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 + 284 = 504.$$

Očito, $\sigma(220) = 220 + 284 = \sigma(284) = 504$.

[2] *Miš* 11, str. 38.

Godine 1736. Euler je dokazao *Fermatov mali poučak*:

Ako su a i p prosti brojevi, tada je $a^p - a$ djeljiv s p.

Kasnije je taj poučak poopćio pri čemu je uveo funkciju Φ koju definira kao broj cijelih brojeva manjih od broja n i relativno prostih s n. Danas su poznate primjene te funkcije u kriptografiji.

Euler se bavio i čuvenim **Fermatovim posljednjim teoremom** koji tvrdi da jednadžba

$$a^n + b^n = c^n$$

za $n > 2$ u skupu cijelih brojeva nema rješenja.[3] Dokazao je točnost tvrdnje za $n = 3$ i $n = 4$.

Dokazao je i nekoliko ostalih *Fermatovih pretpostavki*. Primjerice, tvrdnju da se svaki prost broj oblika $4k + 1$ na jedinstven način dade predočiti u obliku zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Na kraju ovog dijela priče spomenimo tek da je Euler postavio temelje računu kongruencija.

Dugačak bi bio niz u kojem bi popisali sve Eulerove rezultate u teoriji brojeva. No u njegovo doba to područje matematike sastojalo se od niza manjih, međusobno gotovo izoliranih tema i rezultata. Izgradnja teorije brojeva u sustavnu matematičku teoriju započela je pojavom Gaussove *Aritmetike* (1801. g.).

* * *

Ponekad se čini da je Eulerov doprinos geometriji možda bio najmanji i da za geometriju nije imao osobita interesa. Ali dojam je potpuno pogrešan. Da je to tako govori 1600 stranica *Opera Omniae* što su posvećene geometriji.

Poznat je Eulerov sintetički dokaz *Heronove formule* (1748. g.), blizak klasičnom, "pravom", geometrijskom stilu. Euleru se pripisuje i poučak koji kaže da središte S trokutu opisane kružnice, težište G trokuta i njegov ortocentar H (sjecište visina) leže na jednom pravcu pri čemu je $|GH| = 2|GS|$. Taj se pravac zove **Eulerov pravac**.

Euler je jedan od začetnika suvremene diferencijalne geometrije. U tom ga smislu povjesničari matematike stavljaju uz bok Mongeu i Gaussu.

Još jedan Eulerov jednostavan, ali impozantan rezultat pripada popisu *velikih matematičkih otkrića* koja su u temeljima topologije – važne grane suvremene matematike. Riječ je o *Eulerovoj formuli* – jednakosti koja povezuje broj vrhova (v), broj strana (s) i broj bridova (b) svakog konveksnog poliedra:

$$v + s - b = 2.$$

Euler je rješenjem vrlo popularnog problema *Königsberških mostova* (1736.) udario temelje danas vrlo korisnom području matematike – **teoriji grafova**.

Naime, grad Königsberg, danas Kaliningrad – ruska enklava na Baltiku, a nekada krunidbeni grad pruskih careva, smješten je na obalama rijeke Prögel i na dvama riječnim otocima. U ono doba obale i otoke povezivalo je sedam mostova, kako se vidi na slici. Postavilo se pitanje: može li se u jednoj šetnji prijeći svih sedam mostova, ali svaki točno jednom[4]. Euler je dao sasvim jednostavno rješenje postavljenog problema. Taj se trenutak danas drži začetkom teorije grafova.

[3] Za $n = 1$ problem je trivijalan. Za $n = 2$ jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja, to su tzv. Pitagorine trojke.
[4] Miš 24., str. 164. *U jednom potezu*

* * *

Nije neobično što je Euler, koji je u pisanju bio neuobičajeno produktivan, u najvećoj mjeri uobličio **matematički zapis** koji je zaživio te se uz manje promjene rabi i dan-danas.

Uveo je pojam funkcije onakav kakav je i u modernoj matematici, od njega potječe zapis $f(x)$, standardni zapis realne funkcije. Tu su još i oznake za trigonometrijske funkcije, slovo e za zapis poznatog *Eulerovog broja* oznaku Σ za zbrajanje, i za imaginarnu jedinicu. Premda mu se to pripisuje, on nije uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kružnice, ali je dosljednom uporabom pridonio da ona bude opće prihvaćena.

Čitajte Eulera, čitajte Eulera.
On je učitelj svih nas.

(Laplace)

OBAVIJEST

Hrvatsko matematičko društvo – Podružnica Istra organizira

peti stručno-metodički skup
Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi

koji će se održati od 4. do 6. listopada 2007. godine u Puli.

Tema skupa:

Zornost u nastavi matematike.

Skup se održava uz suglasnost Agencije za odgoj i obrazovanje. Svi sudionici skupa dobit će potvrdu Agencije za odgoj i obrazovanje o sudjelovanju na stručnom skupu, koja služi za napredovanje u zvanju. Na skupu će se raditi plenarno i u radionicama.

Kotizacija u iznosu od 200,00 kuna po osobi uplaćuje se na žiro račun HMD – Podružnica Istra 2360000 – 1400157657 s pozivom na broj 03688780–001. Sudionici skupa, uz predaju kopije virmanskog naloga (ne fotokopija) o uplaćenoj kotizaciji dobit će Zbornik radova.

Prijave:
za sudjelovanje na skupu prijavite se HMD - Podružnica Istra:

`skup2007@hmd-istra.org;`
`bpiton@inet.hr;`
`vladimir.kadum@pu.t-com.hr`

za smještaj se prijavljuje pismenim putem organizatoru skupa (pošta, faks, e-pošta)
adresa: ARENATURIST, Splitska 1, 52100 Pula
tel: 052 / 529 432 ili 052 / 520 400
faks: 052 / 529 401
e-pošta: ada@arenaturist.hr ; kontakt osoba: Ada Bogović

Sve obavijesti o skupu potražite na internetskoj stranici: `www.hmd-istra.org`

Zadnji rok za prijavu: 20. rujan 2007. godine

Pozivamo Vas da i na ovome, petom po redu skupu aktivno sudjelujete kao predavač i/ili voditelj radionice.