Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka

Zdravko Kurnik, Zagreb

Konstruktivna geometrija je dio geometrije u kojemu se proučavaju teorija i metode geometrijskih konstrukcija. Geometrijske konstrukcije su vrlo pogodno sredstvo upoznavanja s ravninskim likovima i njihovim svojstvima i zato zauzimaju istaknuto mjesto u izgradnji planimetrije. U nastavi matematike one više nego neki drugi zadaci doprinose ostvarenju mnogih važnih ciljeva nastave matematike i razvojnih osobina učenika: samostalnost, preciznost, smisao za red i urednost, dosjetljivost, originalnost, sistematičnost, logičko i stvaralačko mišljenje i dr. Od pribora za konstruiranje u našoj se školskoj praksi koriste samo ravnalo i šestar.

U [5] opisane su glavne geometrijske metode rješavanja konstruktivnih zadataka: *metoda presjeka, metoda pomoćnih likova, metoda osne simetrije, metoda rotacije, metoda centralne simetrije, metoda translacije, metoda homotetije i metoda sličnosti*.

Ponekad se dogodi da ni uza sva nastojanja nismo u stanju otkriti kojom bi se geometrijskom metodom mogao riješiti postavljeni konstruktivni zadatak. Što da radimo u takvim slučajima? Postoji još samo jedna mogućnost izbora: **algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka.**

1. Opis metode

U daljnjim razmatranjima opisat ćemo upravo navedenu metodu. Bit metode sastoji se u sljedećem:

1) Sastavni dijelovi svakog zadatka su poznate ili dane veličine, nepoznate ili tražene veličine i objekti i uvjeti koji karakteriziraju vezu između danih i nepoznatih veličina i objekata. Uočavanje navedenih sastavnih dijelova zadatka bitno je za njegovo razumijevanje i prvi je korak rješavanja.

2) Drugi korak rješavanja je nastojanje da se nepoznate veličine lika, kojega treba konstruirati, izraze formulama pomoću danih veličina.

3) Treći korak je konstruiranje dobivenih izraza.

Najčešće je za rješenje postavljenog konstruktivnog zadatka dovoljno duljinu x jedne nepoznate veličine izraziti pomoću danih veličina $d_1, d_2, \ldots, d_m$. Dobiva se veza oblika

$$x = I(d_1, d_2, \ldots, d_m).$$

Varijable su i same pretežno duljine dužina. Razmatraju se samo one njihove pozitivne vrijednosti za koje gornji izraz ima smisla i također je pozitivan.

Dalje se radi o konstrukciji nepoznate veličine čija je duljina x određena izrazom $I(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ ili, kako se kraće govori, o konstrukciji izraza $I(d_1, d_2, \ldots, d_m)$.

Lako je zamisliti da će dobiveni izraz I nerijetko biti vrlo složenog oblika. Jasno je da će i pokušaj konstruiranja toga izraza biti složen. Ta činjenica ukazuje na potrebu da se prethodno podrobnije obradi pitanje konstruiranja različitih izraza.

2. Osnovni izrazi

Pri razmatranju složenih algebarskih izraza i njihovom konstruiranju važnu ulogu igra skupina jednostavnijih izraza, koji se lako konstruiraju. Ti se izrazi nazivaju *osnovni izrazi*. Na konstrukcijama osnovnih izraza temelji se primjena algebarske metode u konstruktivnoj geometriji. Zato ćemo na početku najprije reći par riječi o tim konstrukcijama.

U svim konstrukcijama koje slijede a, b i c su duljine danih dužina, m i n prirodni brojevi, a x je duljina dužine koju treba konstruirati.

1° $x=a+b$. Konstrukcija se jednostavno izvodi.

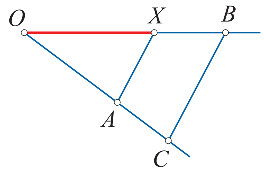
2° $x=a-b$ $(a > b)$. Konstrukcija se jednostavno izvodi.

3° $x=na$. Konstrukcija se svodi na 1°.

4° $x = \frac{a}{n}$. Konstrukcija se svodi na osnovnu konstrukciju dijeljenja dužine na jednake dijelove.

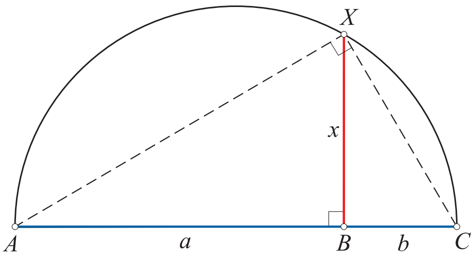
5° $x = \frac{m}{n}a$. Konstrukcija se svodi na 3° i 4°. Najprije se konstruira izraz $x_1 = \frac{a}{n}$, a onda izraz $x_2 = x = mx_1$.

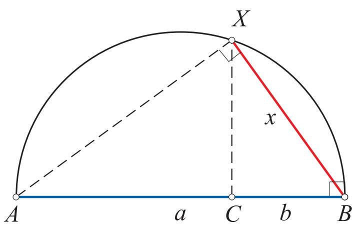
6° $x = \frac{ab}{c}$ (četvrta proporcionala). Zapišemo li jednakost u obliku $c : a = b : x$, vidimo da se konstrukcija može izvesti primjenom metode sličnosti:



$$|OA|=a,\ |OB|=b,\ |OC|=c,\ AX||BC \Rightarrow |OX|=x.$$

7° $x = \sqrt{ab}$ (geometrijska sredina brojeva a i b). Konstrukcija se može izvesti na dva načina primjenom Euklidova poučka o visini, odnosno kateti pravokutnog trokuta:





$$|AB| = a,\ |BC| = b \Rightarrow |BX| = x.$$

8° $x = \sqrt{nab}$. Konstrukcija se svodi na 3° i 7°. Najprije se konstruira izraz $x_1 = na$, a onda izraz $x_2 = x = \sqrt{x_1 b}$. Poteškoća se javlja kad je broj n relativno velik. U tom se slučaju konstrukcija može olakšati transformiranjem danog izraza na oblik $x=\sqrt{\left(\frac{n}{m}a\right)(mb)}$. Na primjer,

$$x=\sqrt{13ab}=\sqrt{\left(\frac{13}{3}a\right)(3b)}.$$

9° $x=\sqrt{a^2+b^2}$. Tražena dužina je hipotenuza pravokutnog trokuta kojemu su a i b duljine kateta.

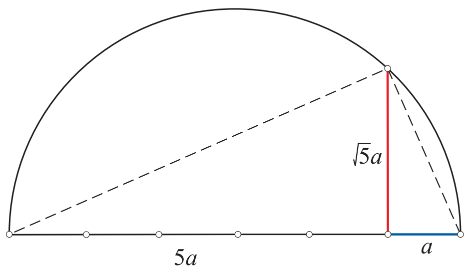
10° $x=\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>b)$. Tražena dužina je kateta pravokutnog trokuta kojemu je a duljina hipotenuze, a b duljina druge katete.

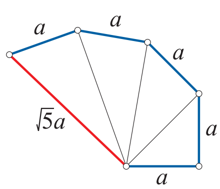
11° $x=\sqrt{na}$. Konstrukcija se svodi ili na 8° ili na 9°. Naime, izraz $\sqrt{na}$ može se napisati ovako $\sqrt{naa}$, pa je to 8° za $b=a$, a ako se taj izraz napiše kao korijen iz sume od n pribrojnika a^2, dakle u obliku $\sqrt{a^2+a^2+...+a^2}$, onda se tu radi o $n-1$ konstrukcija 9°:

$$x_1=\sqrt{a^2+a^2},$$

$$x_2=\sqrt{x_1^2+a^2},\ldots,x_{n-1}=\sqrt{x_{n-2}^2+a^2}.$$

Primjer 1. Konstrukcije izraza $\sqrt{5}a$ na navedena dva načina.





Primijetimo da se postupak konstruiranja izraza $\sqrt{5}a$ na drugi način mogao ubrzati uporabom njegovog drugog zapisa $\sqrt{(2a)^2+a^2}$, jer on pokazuje da je za našu svrhu dovoljna po jedna konstrukcija 1° i 9°. U praksi se slična redukcija pri konstrukciji izraza $\sqrt{na}$ može provesti za svaki prirodan broj n. Tome često pogoduju posebni rastavi prirodnog broja n, kao što su $n=n_1n_2$, $n=n_1^2+n_2^2$, $n=n_1^2-n_2^2$ i dr.

Primjer 2. Posebni rastavi.

a) $x=\sqrt{7}a=\sqrt{(4a)^2-(3a)^2}=\sqrt{(3a)^2-a^2-a^2}$,

b) $x=\sqrt{26}a=\sqrt{(5a)^2+a^2}=\sqrt{(4a)^2+(3a)^2+a^2}$,

c) $x=\sqrt{35}a=\sqrt{(5a)(7a)}=\sqrt{(6a)^2-a^2}$,

d) $x=\sqrt{44}a=\sqrt{(4a)(11a)}=\sqrt{(12a)^2-(10a)^2}$
$=\sqrt{(7a)^2-(2a)^2-a^2}.$

Čitateljima prepuštamo da odgovarajuće konstrukcije opišu ili izvedu sami.

Kako se konstruiraju znatno teži zadaci? Odgovor na ovo pitanje dat ćemo u narednom odjeljku.

3. Konstrukcije složenih algebarskih izraza

Sve izraze možemo podijeliti u dvije skupine: homogeni izrazi i nehomogeni izrazi.

Prvu skupinu opisuje sljedeća definicija.

Definicija. *Za izraz $I(d_1,d_2,\ldots,d_m)$ kažemo da je homogeni izraz dimenzije n ako za sve pozitivne brojeve k vrijedi*

$$I(kd_1,kd_2,\ldots,kd_m)=k^nI(d_1,d_2,\ldots,d_m).$$

Na primjer, $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ je homogeni izraz dimenzije 2, $\frac{ab}{c^5+d^5}$ je homogeni izraz dimenzije –3, a $\frac{\sqrt{ab}}{c}$ homogeni izraz dimenzije 0.

Drugu skupinu sačinjavaju svi oni izrazi koji nisu homogeni. Ti izrazi nazivaju se *nehomogeni algebarski izrazi*.

Kada se pomoću ravnala i šestara može konstruirati neki izraz I? Odgovor na to pitanje daje sljedeća izreka.

Poučak. *Svaki pozitivni izraz $I(d_1,d_2,\ldots,d_m)$, koji se iz danih veličina $d_1,d_2,\ldots,d_m$ dobiva konačnim brojem racionalnih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) i vađenja drugih korijena, može se konstruirati pomoću ravnala i šestara.*

Nas posebno zanimaju pozitivni homogeni izrazi dimenzije 1, budući da se oni pojavljuju kao rezultat primjene algebarske metode u geometrijskim konstrukcijama, a mogu se razmatrati kao duljine dužina. Takvi su očigledno svi osnovni izrazi iz odjeljka 2. Konstrukcije homogenih izraza dimenzije različite od 1 i konstrukcije nehomogenih izraza opisat ćemo odvojeno, jer se one izvode uz jedan dodatni uvjet.

***

1. Da bismo konstruirali pozitivni homogeni izraz dimenzije 1, potrebno je raščlaniti taj izraz na njegove sastavne dijelove, osnovne izraze i onda te osnovne izraze u povezanom nizu konstruirati. Raščlanjivanje velikog broja izraza je uočljivo, prirodno i jednostavno, ali ponekad je za ostvarenje cilja nužno najprije izraz transformirati na pogodniji oblik. Pogledajmo par primjera.

Primjer 3. Konstruirajmo dužinu kojoj je duljina x određena jednakošću

$$x=\frac{a^2b^3}{c^2d^2}\ (a,\ b,\ c,\ d - \text{duljine danih dužina}).$$

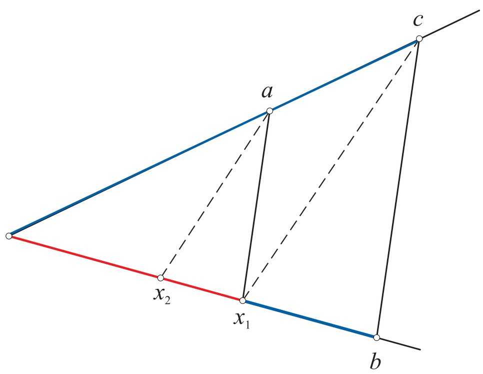
Rješenje. Raščlanjivanje danog izraza na osnovne izraze je vrlo prirodno i lako uočljivo. Naime, možemo pisati

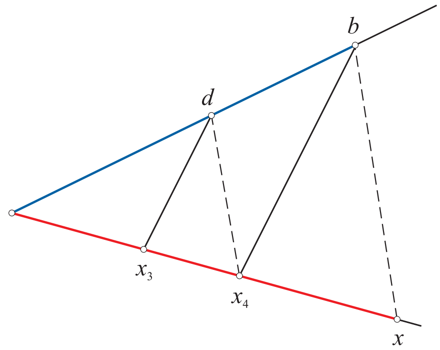
$$x=\frac{a^2b^3}{c^2d^2}=\frac{ab}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}\cdot\frac{b}{d}.$$

Vidimo da se x može konstruirati primjenom četiriju osnovnih konstrukcija 6°:

$$x_1=\frac{ab}{c},\ x_2=\frac{x_1a}{c},\ x_3=\frac{x_2b}{d},\ x_4=x=\frac{x_3b}{d}.$$

Prva dva osnovna izraza iz danih duljina konstruirana su na prvoj, a druga dva na drugoj slici:





Opišite postupak konstruiranja!

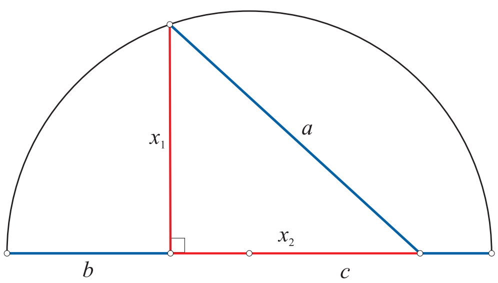
Primjer 4. Konstruirajmo dužinu kojoj je duljina x određena jednakošću

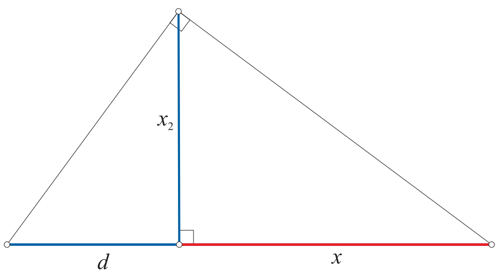
$$x=\frac{a^2-bc}{d}\ (a,\ b,\ c,\ d - \text{duljine danih dužina}).$$

Rješenje. Izraz je pogodan za neposrednu primjenu osnovnih konstrukcija. Za njegovu konstrukciju dovoljne su sljedeće tri (7°, 10°, 6° ili 7°):

$$x_1=\sqrt{bc},\ x_2=\sqrt{a^2-x_1^2},\ x_3=x=\frac{x_2^2}{d}.$$

Konstrukcija:





Opišite postupak konstruiranja!

Primjer 5. Konstruirajmo izraz $x = \dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Rješenje. Izraz se može transformirati na pogodniji oblik na razne načine. Jedan od njih je racionaliziranje nazivnika. Mi odabiremo množenje brojnika i nazivnika s $\sqrt{a}$. Kao rezultat dobivamo izraz $x = \dfrac{a\sqrt{bc}}{a+\sqrt{ab}}$. Sada su svi osnovni izrazi vidljivi

$$x_1 = \sqrt{bc},\ x_2 = \sqrt{ab},\ x_3 = a + x_2,\ x_4 = x = \frac{ax_1}{x_3}.$$

Nacrtajte odgovarajuće slike! Nadalje, pokažite da je racionaliziranje nazivnika nepovoljnija transformacija, jer vodi na konstrukcije 7 osnovnih izraza.

***

2. Razmotrimo sada pitanje konstruiranja homogenih izraza dimenzije različite od 1 i nehomogenih izraza. Takvi izrazi susreću se u praksi, na primjer kod crtanja grafova nekih funkcija.

Primjeri takvih izraza:

$$\frac{1}{a},\ a^2,\ \frac{a+b}{a-b},\ 2+\sqrt{2},\ \frac{a}{a+1},\ a^2-ab+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Za konstruiranje izraza ovog oblika nužno je prije svega uvesti dužinu jedinične duljine $e=1$, a onda izraz $I(d_1,d_2,\ldots,d_m)$ transformirati na homogeni izraz dimenzije 1 putem jednakosti

$$I(d_1,d_2,\ldots,d_m) = e\,I\left(\frac{d_1}{e},\frac{d_2}{e},\ldots,\frac{d_m}{e}\right).$$

Sada je problem sveden na prethodni slučaj.

Primjer 6. Homogeniziranje izraza.

1) $x = \dfrac{1}{a} = \dfrac{e^2}{a}$,

2) $x = a^2 = \dfrac{a^2}{e}$,

3) $x = \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{ae+be}{a-b}$,

4) $x = 2+\sqrt{2} = 2e+\sqrt{2}e$.

4. Primjena

Razmatranjima u prethodnom odjeljku pripremljen je teren za naš glavni cilj: upoznavanje algebarske metode rješavanja konstruktivnih zadataka.

Ilustrirat ćemo njezinu primjenu na par primjera.

Često je potrebno jedan lik pretvoriti u drugi lik koji ima istu površinu kao i prvi. U školskoj su matematici poznate neke takve pretvorbe. Evo primjera pretvorbe za koju je nužna primjena opisane metode.

Primjer 7. Konstruirajmo jednakostranični trokut kojemu je površina jednaka površini danog pravokutnika $ABCD$ s duljinama stranica a i b.

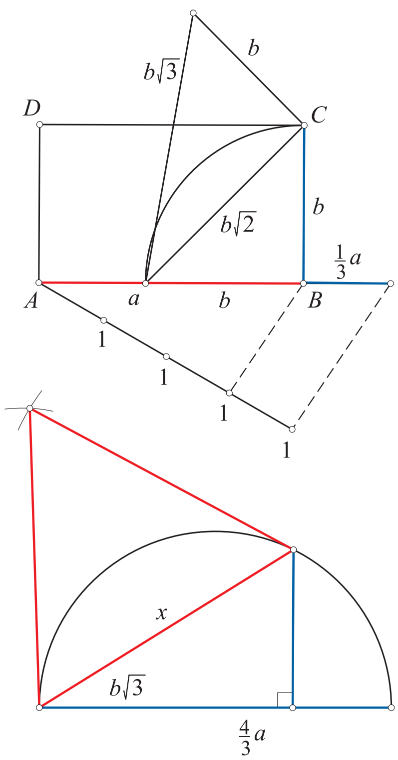
Rješenje. Ako je x duljina stranice traženog jednakostraničnog trokuta, tada uvjet možemo pisati $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = ab$. Odavde nalazimo da je

$$x = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3}ab}.$$

Raščlanjivanje izraza na osnovne izraze izgleda ovako:

$$x_1 = \frac{4}{3}a,\ x_2 = \sqrt{3}b,\ x_3 = \sqrt{x_1x_2} = x.$$

Konstrukcija:



Opišite postupak konstruiranja!

Primjer 8. Razdijelimo danu dužinu $\overline{AB}$ točkom Z na dva dijela, tako da se čitava dužina odnosi prema većem dijelu kao veći dio prema manjem dijelu (zlatni presjek).

Rješenje. Konstrukcija zlatnog presjeka je vrlo poznat i važan problem. Susreće se u slikarstvu i graditeljstvu. Pogledajmo što trebamo za konstruiranje točke Z. Poznata je duljina dužine $\overline{AB}$, a nepoznate su udaljenosti točke Z od njezinih krajeva A i B. Neka su te veličine redom a, u, v ($u > v$). Tada iz uvjeta $a : u = u : v$, $u + v = a$ nalazimo za u kvadratnu jednadžbu

$$u^2 + au - a^2 = 0.$$

Zadovoljava samo pozitivno rješenje

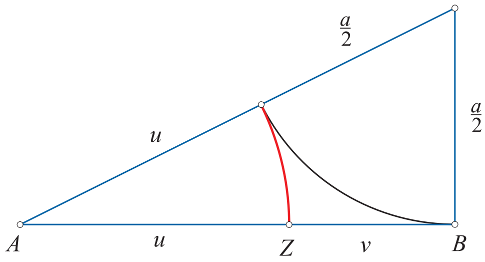
$$u = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Lako nalazimo da je duljina manjeg dijela dužine

$$v = \frac{3a}{2} - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Konstrukcija:

$$x_1 = \frac{a}{2},\ x_2 = \sqrt{a^2 + x_1^2},\ x_3 = -x_1 + x_2.$$



LITERATURA

[1] Z. Kurnik, *Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadaća*, DMM "Pitagora", Beli Manastir, 1990.

[2] Z. Kurnik, *Geometrijske konstrukcije*, Poučak 9 (2002.), 34-41.

[3] Z. Kurnik, P. Mladinić, R. Svedrec, *Osnovne konstrukcije*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 13 (2004.), 65-86.

[4] Z. Kurnik, *Osnovne konstrukcije i osnovna primjena*, Matematika i škola 29 (2005.), 148-152.

[5] Z. Kurnik, *Konstruktivne metode*, Matematika i škola 30 (2005.), 195-201.

[6] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

Vremenik natjecanja

Natjecanje	Datum održavanja	Vrijeme održavanja
Školsko (gradsko*)	25. siječnja 2008. (petak)	u 9 sati
Županijsko	7. ožujka 2008. (petak)	u 10 sati
Državno	6. – 9. travnja 2008. (nedjelja – srijeda) u Primoštenu (škola domaćin – Osnovna škola Primošten u Primoštenu)	
Regionalno	16. svibnja 2008.	

* U velikim centrima (Zagreb, Split, Rijeka, ...) 25. siječnja 2008. u 9 sati održat će se Gradska natjecanja na kojima će se natjecati prethodno odabrani učenici u školama s tog područja.