Metoda koordinata

Zdravko Kurnik, Zagreb

U analitičkoj geometriji **metoda koordinata** je osnovna i prirodna metoda istraživanja i rješavanja problema. Međutim, metoda koordinata ponekad se može primijeniti i u drugim područjima geometrije. Zadaci iz područja u kojima je to moguće najčešće su zadaci koji se mogu riješiti na više načina.

Metodički razlog za rješavanje zadatka na više načina leži u tome da tada za rješavanje treba više teorijskih činjenica. Time se samo jednim zadatkom aktivira, analizira i primjenjuje veća količina stečenog znanja učenika. To povoljno utječe na trajnost njihova znanja.

U ovom članku opisat ćemo primjenu metode koordinata u planimetriji.

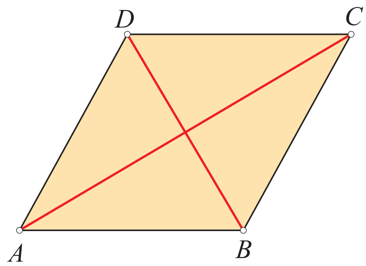
Osnovno pitanje je kako najpovoljnije postaviti koordinatni sustav. Obično se postupa na sljedeći način:

- za ishodište O koordinatnog sustava odabire se neka istaknuta točka promatranog lika (vrh, polovište stranice, težište, ortocentar, sjecište dijagonala, diralište tangente);
- za barem jednu koordinatnu os odabire se pravac na kojem leži neki istaknuti element lika (stranica, visina, težišnica, dijagonala, promjer, tetiva, simetrala stranice, simetrala kuta, tangenta, os simetrije).

Ovim se postiže da neke točke lika dobivaju jednostavne koordinate, što se povoljno odražava na jednadžbe određenih pravaca i jednostavnije izračunavanje tražene veličine ili brže opravdanje postavljene tvrdnje.

Ilustrirajmo rečeno s nekoliko primjera. Počinjemo s dokazom jednog poučka iz osnovnoškolske matematike.

Primjer 1. Dokažimo da su dijagonale $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ romba $ABCD$ međusobno okomite.

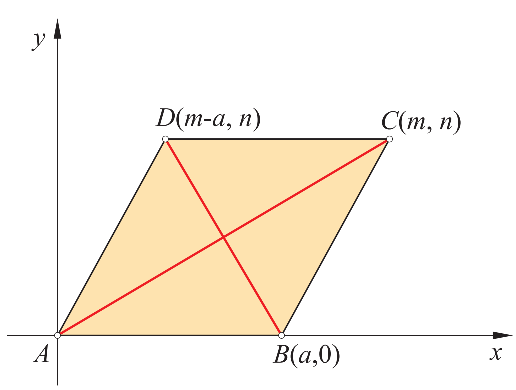


Dokaz. Uobičajeni dokaz ovog poučka zasniva se na primjeni *sličnosti trokuta*. Međutim, budući da se u formulaciji spominje okomitost, dokaz se može provesti i pomoću *metode koordinata*, tako da se u njoj uporabi analitički *uvjet okomitosti pravaca*.

Označimo s a duljinu stranice romba $ABCD$, a koordinatni sustav postavimo ovako: vrh A neka je ishodište O, pravac AB neka je koordinatna os x, a pravac točkom A okomit na x neka je koordinatna os y.

U tom koordinatnom sustavu poznate su koordinate vrhova A i B, dok su nepoznate koordinate vrhova C i D. Zato ćemo ih posebno označiti:

$$A\,(0, 0),\ \ B\,(a, 0),\ \ C\,(m, n),\ \ D\,(m-a, n).$$

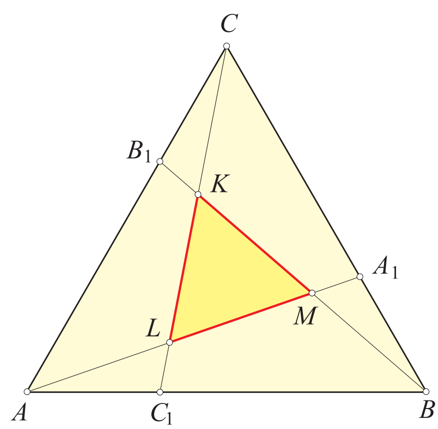


Jednadžbe pravaca AC i BD na kojima leže dijagonale romba glase $y=\frac{n}{m}x$, $y=\frac{n}{m-2a}(x-a)$, pa vidimo da su koeficijenti smjerova tih pravaca $k_{AC}=\frac{n}{m}$, $k_{BD}=\frac{n}{m-2a}$.

S druge strane, vrijedi jednakost $|AB|=|BC|$, odnosno u analitičkom zapisu jednakost $a=\sqrt{(m-a)^2+n^2}$. Jednakost se nakon kvadriranja i pojednostavljenja može zapisati u obliku $\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m-2a}=-1$. To je upravo uvjet okomitosti pravaca AC i BD, a to znači i dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, romba $ABCD$.

***

Primjer 2. Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC dane su točke A_1, B_1, C_1 takve da je $|BA_1|=|CB_1|=|AC_1|=\frac{1}{3}|AB|$. U kojem su odnosu površina trokuta KLM, što ga određuju pravci AA_1, BB_1 i CC_1, i površina trokuta ABC?

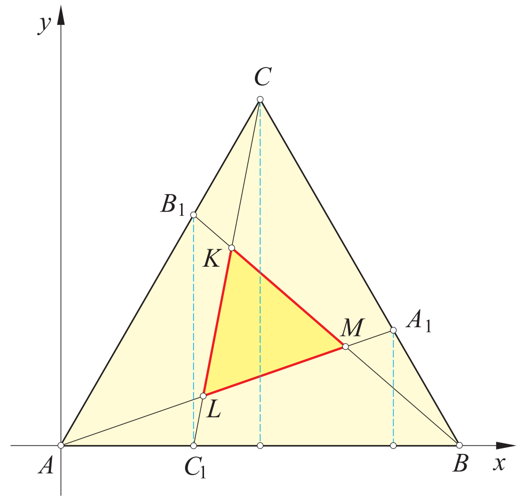


Rješavanje. Formula za površinu trokuta postoji u planimetriji, analitičkoj geometriji i trigonometriji. Ta činjenica upućuje na mogućnost rješavanja ovog zadatka na tri različita načina.

Budući da je zadatak planimetrijski, jasno je da bi *metoda površina* trebala biti prirodno i osnovno sredstvo njegovog rješavanja. Međutim, mi ćemo ovdje opet razmotriti drugi način, primjenu analitičke geometrije, tj. primjenu *metode koordinata*.

Koordinatni sustav postavimo tako da je vrh A ishodište, a stranica $\overline{AB}$ na osi x koordinatnog sustava. Neka je uz to $|AB|=1$.

Sa slike dosta lako očitavamo koordinate vrhova A, B, C i djelišnih točaka A_1, B_1, C_1: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_1\left(\frac{5}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $B_1\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $C_1\left(\frac{1}{3},0\right)$.



Za određenje koordinata vrhova K, L, M trebamo jednadžbe pravaca AA_1, BB_1, CC_1:

$$AA_1 \ldots y = \frac{\sqrt{3}}{5} - x,\ BB_1 \ldots y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1),$$
$$CC_1 \ldots\ y = -3\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Određivanjem sjecišta parova pravaca nalazimo:

$$K\left(\frac{3}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{7}\right),\ L\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right),\ M\left(\frac{5}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7}\right).$$

Konačno nalazimo

$$p(KLM) = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{28} = \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{7} \cdot p\,(ABC).$$

Poučak:

Omjer površina trokuta KLM i ABC jednak je $1:7$.

Budući da su poznate koordinate vrhova trokuta KLM, lako se može opravdati i sljedeća tvrdnja:

Trokut KLM također je jednakostraničan.

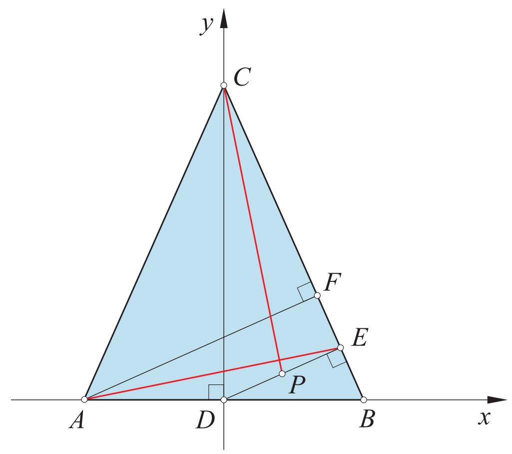
***

Primjer 3. Neka je $\overline{CD}$ visina jednakokračnog trokuta ABC, $\overline{DE}$ visina trokuta CBD, a P polovište te visine. Dokažimo da su dužine $\overline{AE}$ i $\overline{CP}$ okomite.

(Općinsko natjecanje 1984., 1. razred)
(Savezno natjecanje 1985., 7. razred)

Rješavanje. Ovo je dokazni zadatak u kojem se nekoliko puta spominje okomitost. Zato naslućujemo primjenu one teorijske osnove gdje se okomitost lako provjerava. To navodi na zaključak da se i ovaj zadatak može riješiti na tri načina: primjenom *okomitosti dužina* u planimetriji, *analitički* i primjenom *vektora*.

Razmotrimo opet drugi način. Koordinatni sustav prirodno je postaviti tako da je D njegovo ishodište, a pravci DB i DC njegove osi x i y. Ako još uvedemo visinu $\overline{AF}$ trokuta ABC, tada je za dokaz pogodna sljedeća slika:



Neka su u jednakokračnom trokutu ABC duljine osnovice i pripadne visine c i v. Tada su u koordinatnom sustavu (D, DB, DC) koordinate njegovih vrhova $A\left(-\frac{c}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{c}{2}, 0\right)$, $C\,(0, v)$.

Dalje nalazimo jednadžbe sljedećih pravaca:

$$BC \ldots y = -\frac{2v}{c}x + v, \quad DE \ldots y = \frac{c}{2v}.$$

Sjecište ovih dvaju pravaca je točka $E\left(\frac{2cv^2}{c^2+4v^2}, \frac{c^2}{c^2+4v^2}\right)$, a polovište dužine $\overline{DE}$ točka $P\left(\frac{cv^2}{c^2+4v^2}, \frac{1}{2}\frac{c^2v}{c^2+4v^2}\right)$.

Nadalje, nije teško naći koeficijente smjera pravaca AE i CP:

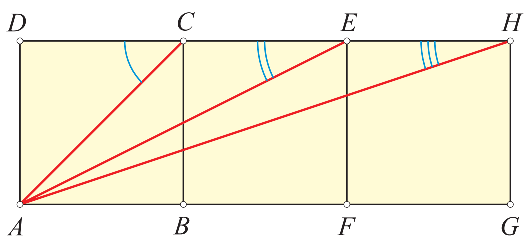
$$k_{AE} = \frac{2cv}{c^2+8v^2},\quad k_{CP} = -\frac{c^2+8v^2}{2cv}.$$

Sad se neposredno vidi da je $k_{AE} \cdot k_{CP} = -1$, a to znači okomitost dužina $\overline{AE}$ i $\overline{CP}$. Time je dokaz gotov.

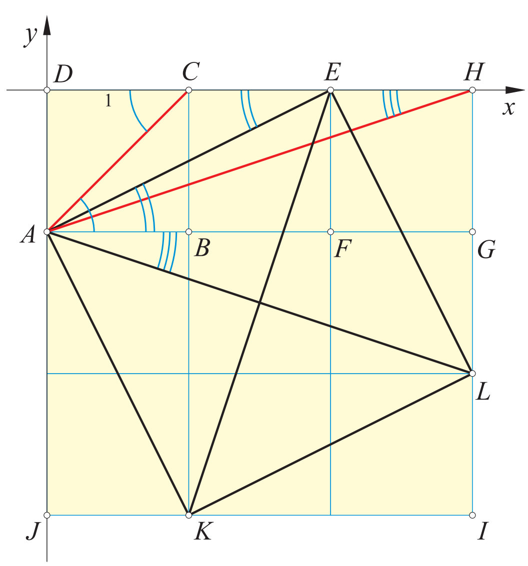
***

Primjer 4. Dana su tri povezana kvadrata $ABCD$, $BCEF$ i $EFGH$. Pokažimo da je

$$\sphericalangle DCA + \sphericalangle DEA + \sphericalangle DHA = 90^\circ.$$



Dokaz. Dopunimo dana tri kvadrata sa šest sukladnih kvadrata do većeg kvadrata $DHIJ$. Uvedimo sljedeći koordinatni sustav: $D=O$, $|DC| = 1$, $DH = x$, $AD = y$ i promatrajmo neke točke i pravce.



Točke: $A(0, -1)$, $E(2, 0)$, $L(3, -2)$, $K(1, -3)$.

Jednadžbe pravaca:

$$AE \ldots y = \frac{1}{2}x - 1, \quad EL \ldots y = -2x + 4,$$

$$KL \ldots y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}, \quad AK \ldots y = -2x - 1,$$

$$AL \ldots y = -\frac{1}{3}x - 1, \quad EK \ldots y = 3x - 6.$$

Uspoređivanjem koeficijenata smjerova pravaca izvodimo ove zaključke:

$AE \perp EL$, $AE \parallel KL$, $AK \perp KL$, $AK \parallel EL$, $EK \perp AL$.

Četverokut $AELK$ je kvadrat!

Završni korak dokaza:

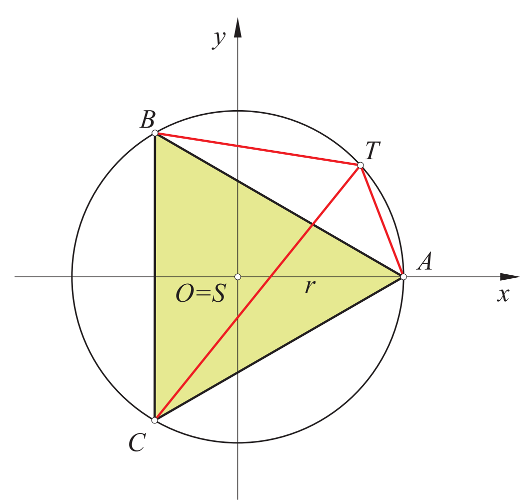
$$\sphericalangle DCA + \sphericalangle DEA + \sphericalangle DHA$$
$$= 45^\circ + \sphericalangle GAE + \sphericalangle LAG = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

***

Primjer 5. Zbroj kvadrata udaljenosti bilo koje točke T kružnice $k(S, r)$ od vrhova jednakostraničnog trokuta ABC upisanog u tu kružnicu konstantna je veličina.

Dokaz. Neka je koordinatni sustav odabran kao na slici $(O = S,\ x = SA,\ y \perp x)$. Kao što znamo, središnja jednadžba kružnice glasi $x^2+y^2= r^2$. Sada se lako pokazuje da u tom koordinatnom sustavu vrhovi trokuta na kružnici imaju sljedeće koordinate:

$$A\,(r, 0),\ B\left(-\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right),\ C\left(-\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}\right).$$



Ako su x, y koordinate točke T, tada za udaljenosti točke T od vrhova A, B, C vrijede jednakosti

$$|AT|^2 = (x-r)^2 + y^2 = x^2 - 2rx + r^2 + y^2,$$

$$|BT|^2 = \left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + rx + \frac{r^2}{4} + y^2 - ry\sqrt{3} + \frac{3r^2}{4},$$

$$|CT|^2 = \left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + rx + \frac{r^2}{4} + y^2 + ry\sqrt{3} + \frac{3r^2}{4}.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 = 3(x^2 + y^2) + 3r^2 = 6r^2,$$

što potvrđuje valjanost izreke.

***

Veći broj dodatnih primjera primjene *metode koordinata* čitatelj može naći u navedenoj literaturi.

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet, Sarajevo, 2006.

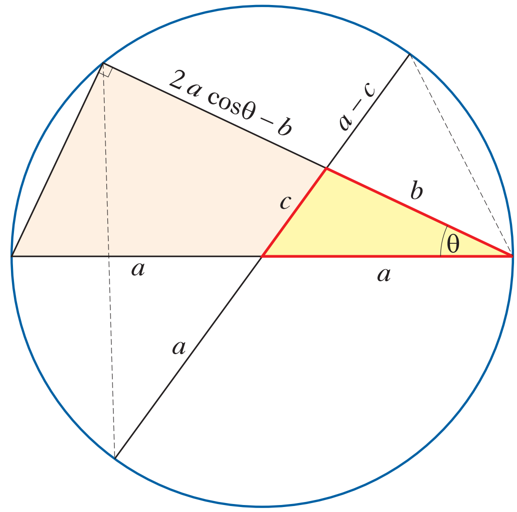
[2] L. Čeliković, *Primjena radijus-vektora i koordinatne metode u planimetriji*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 10 (2001.), 12-25.

[3] I. Ilišević, *Primjena analitičke geometrije u planimetriji i stereometriji*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 13 (2004.), 39-58.

[4] Z. Kurnik, *Zadatci s više načina rješavanja*, HMD, Zagreb, 2004.

DOKAZ BEZ RIJEČI

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\theta$$



$$(2\,a\cos\theta - b)b = (a-c)(c+a)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\theta$$

Sydney H. Kung (*Mathematics Magazine*)