

Pismeno izražavanje u nastavi matematike, 2. dio

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb



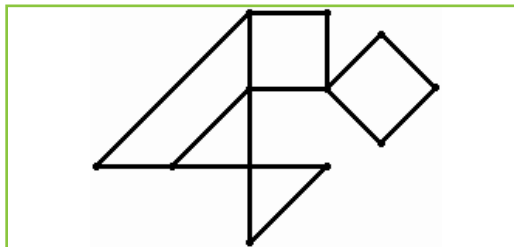
Ukoliko nastavnik zanemaruje izražavanje učenika, učenik ostaje pasivan i tada, čak i u matematici, možemo doći u opasnost da dobijemo samo reprodukcijsko matematičko znanje bez imalo razumijevanja: praznu reprodukciju algoritama, definicija, pravila i dokaza bez pravog uvida u gradivo. Jedan od načina kako realizirati dobru i plodonosnu komunikaciju jest poticanje pismenog izražavanja u nastavi matematike.

Rekonstrukcija onog što su učenici čuli, vidjeli ili pročitali

Rekonstrukcija onog što su učenici čuli, vidjeli ili pročitali se odnosi na rekonstrukciju sadržaja koji se učenicima prezentirao nastavnikovim izlaganjem ili tekstem u udžbeniku. Tekstovi se zatim mogu pročitati u razredu kao dobar povod za raspravu i utvrđivanje gradiva kako bi se ispravile moguće pogreške, a iskazi matematički ispravili. Također, i ovakve se rasprave zatim mogu pismeno opisati.

Primjer 8: Rekonstrukcija onog što su učenici vidjeli – srednja škola.

Zadatak: Opišite zadanu sliku, tako da je može nacrtati netko tko je nije vidio.



Slika 1. (Izvor slike: H. Maier, 2000.)

Ova je slika predočena srednjoškolcima, koji su je trebali opisati tako da zamišljena osoba, koja ni-

kada nije vidjela ovu sliku, može jednoznačno nacrtati istu sliku. Iako su svi likovi na slici učenicima poznati, kao i postojeći odnosi među njima, pokazalo se da nije baš lako točno opisati crtež. Naravno, treba uzeti u obzir da se ovakvi zadaci gotovo uopće ne rade na nastavi matematike te učenici nemaju iskustva s takvim opisivanjem. Stoga ovdje donosim više ili manje precizne autentične ideje i obrazloženja naših srednjoškolaca. Čitatelju prepuštam u zadatak da odgonetne je li koji od učenika potpuno točno opisao sliku.

Spoji redom točke B i P , te točke A i F . Nad dužinom PF konstruiraj kvadrat i označi točku K kao vrh kvadrata koji je na istom pravcu s točkom P . Preostali vrh kvadrata neka je L . Konstruiraj točku M u ravnini tako da je $|KL|=|KM|$ i $\sphericalangle LKM = 45^\circ$. Spoji točke K i M . Nad dužinom KM konstruiraj kvadrat. To je to. Hvala na pažnji.

Nacrtamo jednakokračni pravokutni trokut i povučemo mu srednjicu koja spaja polovišta njegovih kateta. Manji trokut na slici zarotiramo za 180° oko vrha pravog kuta. Nad polovicom katete čiji je jedan vrh ujedno i vrh hipotenuze konstruiramo kvadrat. Dobiveni kvadrat zarotiramo u negativnom smjeru za 135° oko njegovog vrha koji se nalazi nasuprot vrhu hipotenuze početnog nacrtanog trokuta.

Slika 2.

Odgovor (Goran, 16 godina, slika 2):

Nacrtamo jednakokračni pravokutni trokut i povučemo mu srednjicu koja spaja polovišta njegovih kateta. Manji trokut na slici zarotiramo za 180° oko vrha pravog kuta. Nad polovicom katete čiji je jedan vrh ujedno i vrh hipotenuze konstruiramo kvadrat. Dobiveni kvadrat zarotiramo u negativnom smjeru za 135° oko njegovog vrha koji se nalazi nasuprot vrhu hipotenuze početnog nacrtanog trokuta.

Odgovor (Antonio, 15 godina, slika 3):

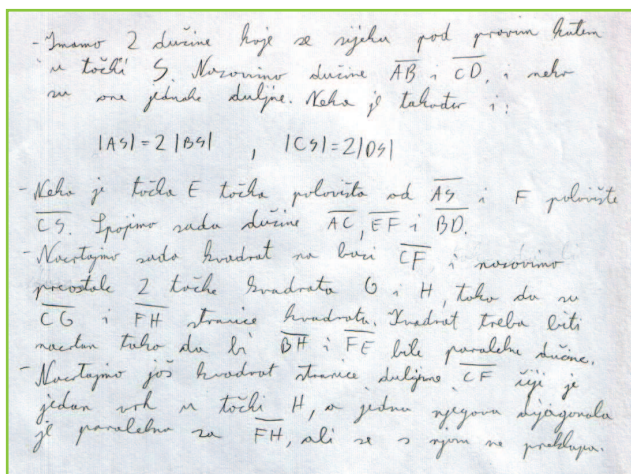
Nacrtaj dužinu duljine x . Geometrijskom konstrukcijom podijeli je na tri dijela i označi redom točkama A, B, C i D , pri čemu su A i D krajnje točke dužine i $|AB|=|BC|=|CD|$. Iz točke C konstruiraj dužinu \overline{CE} koja je okomita na dužinu \overline{AD} tako da je $|CE|=\frac{x}{3}$. Spoji točke D i E .

Iz točke C konstruiraj dužinu \overline{CF} koja je okomita na dužinu \overline{AD} tako da je točka F sa suprotne strane dužine $|AD|$ u odnosu na točku E i $|CF|=\frac{2}{3}x$.

Konstruiraj polovište dužine \overline{CF} i označi ga s P .

Nacrtaj dužinu duljine x . Geometrijskom konstrukcijom podijeli je na tri dijela i označi redom točkama A, B, C i D , pri čemu su A i D krajnje točke dužine i $|AB|=|BC|=|CD|$. Iz točke C konstruiraj dužinu \overline{CE} koja je okomita na dužinu \overline{AD} tako da je $|CE|=\frac{x}{3}$. Spoji točke D i E .
 Iz točke C konstruiraj dužinu \overline{CF} koja je okomita na dužinu \overline{AD} tako da je točka F sa suprotne strane dužine $|AD|$ u odnosu na točku E i $|CF|=\frac{2}{3}x$.
 Konstruiraj polovište dužine \overline{CF} i označi ga s P . Spoji redom točke B i P , te točke A i F . Nad dužinom PF konstruiraj kvadrat i označi točku K kao vrh kvadrata koji je na istom pravcu s točkom P . Preostali vrh kvadrata neka je L . Konstruiraj točku M u ravnini tako da je $|KL|=|KM|$ i $\sphericalangle LKM = 45^\circ$. Spoji točke K i M . Nad dužinom KM konstruiraj kvadrat. To je to. Hvala na pažnji.
 * pri čemu je $|AB|=|BC|=|CD|$.

Slika 3.



Slika 4.

Odgovor (Filip, 16 godina, slika 4):

Imamo dvije dužine koje se sijeku pod pravim kutom u točki S . Nazovimo dužine \overline{AB} i \overline{CD} , i neka su one jednake duljine. Neka je također i $|AS|=2|BS|$, $|CS|=2|DS|$.

Neka je točka E točka polovišta od \overline{AS} i F polovište \overline{CS} . Spojimo sada dužine \overline{AC} , \overline{EF} i \overline{BD} .

Nacrtajmo sada kvadrat na bazi \overline{CF} i nazovimo preostale dvije točke kvadrata G i H tako da su \overline{CG} i \overline{FH} stranice kvadrata. Kvadrat treba biti nacrtan tako da bi \overline{BH} i \overline{FE} bile paralelne dužine.

Nacrtajmo još kvadrat stranice duljine \overline{CF} čiji je jedan vrh u točki H , a jedna njegova dijagonala je paralelna sa \overline{FH} , ali se s njom ne preklapa.

Odgovor (Ante, 15 godina, slika 5):

Zamislimo (bez crtanja) pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Spojimo dužinama točke sa sljedećim koordinatama:

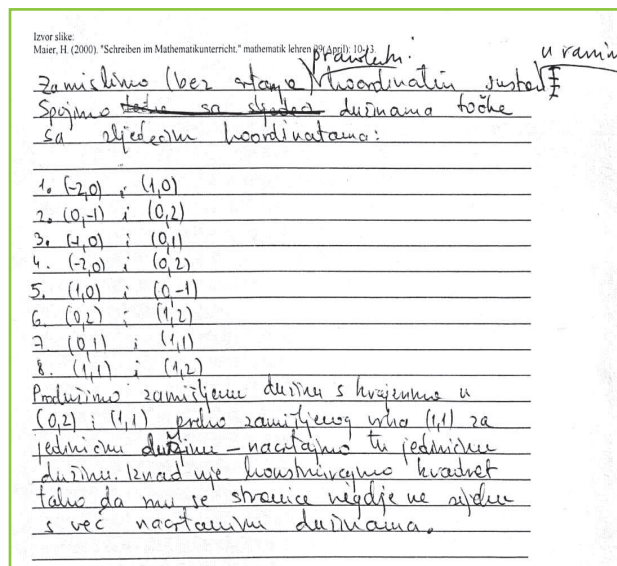
$(-2,0)$ i $(1,0)$; $(0,-1)$ i $(0,2)$; $(-1,0)$ i $(0,1)$;
 $(-2,0)$ i $(0,2)$; $(1,0)$ i $(0,-1)$; $(0,2)$ i $(1,2)$;
 $(0,1)$ i $(1,1)$; $(1,1)$ i $(1,2)$.

Produžimo zamišljene dužine s krajevima u $(0,2)$ i $(1,1)$ preko zamišljenog vrha $(1,1)$ za jediničnu dužinu – nacrtajmo tu jediničnu dužinu. Iznad nje konstruirajmo kvadrat tako da mu se stranice nigdje ne sijeku s već nacrtanim dužinama.

Zanimljivo je napomenuti da je slika iz prethodnog primjera bila ponuđena i učenicima nekih osmi razreda osnovne škole. No, pokazalo se da ni bolji osnovnoškolci ne mogu niti približno točno opisati gornju sliku. Ali to ne znači da ne bi trebali vježbati takve stvari. Primjerice, dovoljno bi bilo dati im da opišu sliku na kojoj je jedan jednakokratan pravokutan trokut s nacrtanom srednjicom koja spaja polovišta kateta. Evo još jednog primjera iz osnovne škole:

Primjer 9: Rekonstrukcija onog što su učenici vidjeli – osnovna škola.

Kolegica Alena Dika iz Rijeke već godinama svojim učenicima petih razreda prilikom obrade gradiva geometrije zadaje zanimljiv zadatak za rad u parovima. Jedan učenik crta lik koji se sastoji od poznatih geometrijskih likova i zatim taj svoj lik treba opisati riječima. Po danom opisu drugi učenik treba nacrtati lik. Ako su opis i crtež točni, nacrtani lik treba biti identičan početnom liku. Ovdje donosim primjer jednog takvog rada. Završni crtež nije identičan početnom, što znači da postoje određene pogreške u opisu odnosa među likovima, ili pak u crtanju. Čitatelju opet prepuštam da odgonetne propuste. No, svaka pohvala



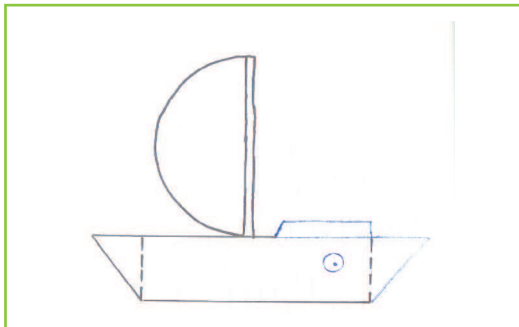
Slika 5.

kolegici na poticanju ovakvih vježbi već kod 11-godišnjaka!

Zadatak: Nacrtajte sliku, pa je opišite (osnovna škola, rad u paru)

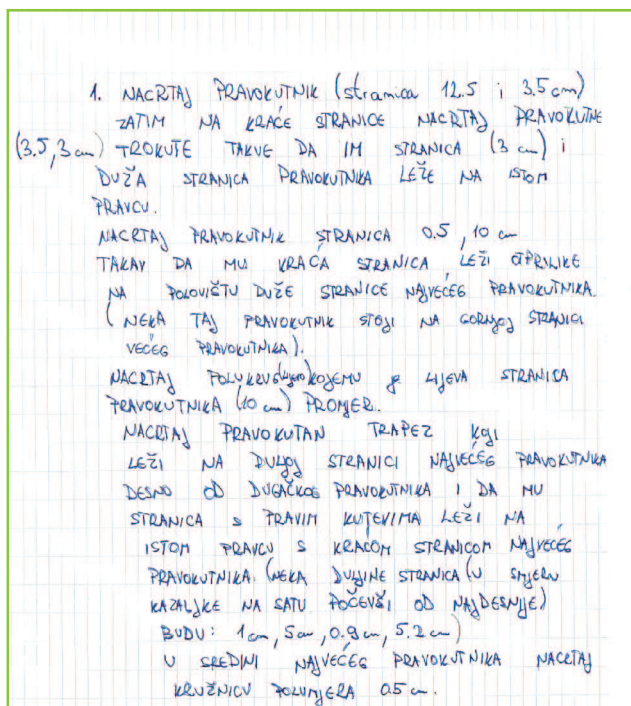
Postupak (slika 7):

Početna slika:



Slika 6.

Nacrtaj pravokutnik (stranica 12.5 i 3.5 cm), zatim na kraće stranice nacrtaj pravokutne (3.5, 3 cm) trokute takve da im stranica (3 cm) i duža stranica pravokutnika leže na istom pravcu.



Slika 7.

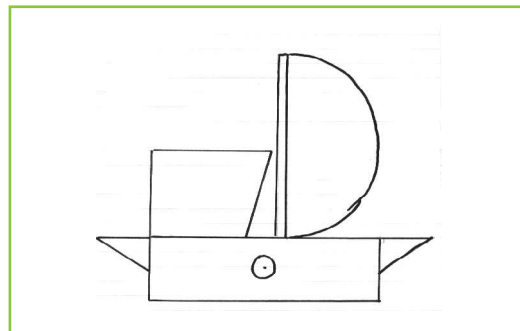
Nacrtaj pravokutnik stranica 0.5 i 10 cm takav da mu kraća stranica leži otprilike na polovištu duže stranice najvećeg pravokutnika (neka taj pravokutnik stoji na gornjoj stranici većeg pravokutnika).

Nacrtaj polukrug (lijevo) kojemu je lijeva stranica pravokutnika (10 cm) promjer.

Nacrtaj pravokutan trapez koji leži na duljoj stranici najvećeg pravokutnika desno od dugačkog pravokutnika i da mu stranica s pravim kutevima leži na istom pravcu s kraćom stranicom najvećeg pravokutnika (neka duljine stranica (u smjeru kazaljke na satu počevši od najdesnije) budu: 1 cm, 5 cm, 0.9 cm, 5.2 cm).

U sredini najvećeg pravokutnika nacrtaj kružnicu polumjera 0.5 cm.

Konačna slika:



Slika 8.

Primjer 10: Rekonstrukcija pročitano – seminar-ski rad

Jedan primjer rekonstrukcije pročitano je, primjerice, pisanje seminarskog rada. Mnogi učenici misle da pisati rad znači kopirati, prepisati ili doslovno prevesti dijelove već postojećih radova. Učenike treba uputiti da korištenje literature znači da svojim riječima treba opisati problem ili zadanu tematiku, a citate posebno istaknuti, jer se tu ne radi o prepisivanju iz udžbenika ili leksikona.

Zadatak: Brojevna kružnica (Marina, 18 godina, slika 9)

Zaključak

Uvijek je važno poticati obosmjernu komunikaciju u nastavi. U ovom tekstu je poseban naglasak stavljen na pismeno izražavanje o matematičkim

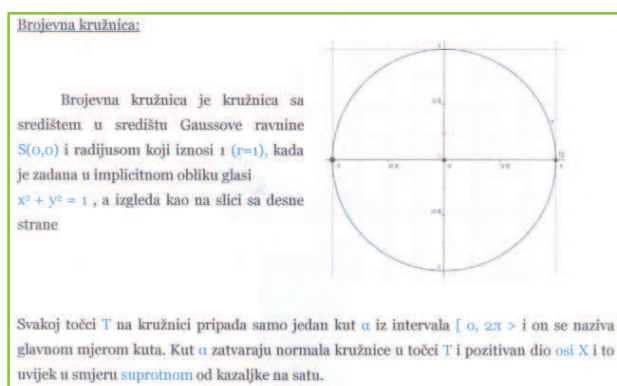
temama. Da se članak ne bi sveo samo na teorijsku sistematizaciju, ideje su potkrijepljene primjerima, i to autentičnim učeničkim pismenim izražajima iz naših osnovnih i srednjih škola.

U našoj se nastavi ovakva nastojanja ne potiču baš često. Postoje neki opravdani razlozi zbog kojih nastavnici ne primjenjuju ovu metodu, a to su, primjerice, prenatrpani nastavni programi, naglasak na obrazovnim postignućima rješavanjem tipskih zadataka, smanjenje broja sati matematike u nekim srednjoškolskim smjerovima, previeliki razredi, loši uvjeti za izvođenje nastave i sl. No ipak, kako bi se pismeno izražavanje svakako trebalo poticati u nastavi, možemo učenicima zadati pisane zadatke bar za domaću zadaću, kao motivaciju za novu temu ili uz ponavljanje gradiva. Ti tekstovi zatim trebaju poslužiti kao povod kvalitetnim razrednim raspravama, kako bi se matematičke ideje što bolje izoštrile.

Budući da učenici nisu navikli na ovakav način rada na satu matematike, u početku možemo očekivati otpor i rečenice tipa „O, pa nećemo valjda sada i na matematici pisati sastavke!“ ili „Matematika mi je uvijek bila super baš zbog toga što smo samo računali! Što je sad ovo?“. Ili pak druga krajnost: „Konačno malo odmora od matematike, jupiii, pišemo sastavak! Tako ću se ipak lakše izvući...“.

Naravno, poticanje pisanja u nastavi treba biti smisleno i ciljano, nikako pretjerano i na silu. Ti tekstovi ne trebaju biti veliki eseji, ponekad je dovoljna rečenica (ili dvije) napisana svojim riječima kao dobra vježba za argumentiranje u matematici. Omjer objašnjenja govornim jezikom treba izmjenjivati s poticanjem izražavanja simboličkim matematičkim jezikom.

Na kraju podcrtajmo najvažnije: U matematici se ne radi samo o zadacima s brojevima, kako je mnogi doživljavaju, matematika uključuje *ideje*. A ideje se mogu prezentirati usmeno, pismeno ili vizualno. Kada se učenik pismeno izražava o matematičkim temama, one postaju jasne drugima, ali i njemu samome jer pisanjem učenik sam izoštrava svoja razmišljanja prema određenoj temi. Na taj se način može “vidjeti” učenikovo razmišljanje, a ne samo slijepo izvršenje određene



Slika 9.

metode. Pismeno bi izražavanje trebalo poticati u svim predmetima, a za matematiku je važno da se pismeno izražavanje posebno potiče u predmetima prirodoslovlja gdje se kao argumenti mogu koristiti i određene matematičke ideje.

LITERATURA

- [1] D. Glasnović Gracin, *Matematička pismenost*, Matematika i škola 39-40, 155-163 (39); 202-210 (40), Element, Zagreb, 2007.
- [2] D. S. Goldsby, B. Cozza, *Writing Samples to Understand mathematical Thinking*, Mathematics Teaching in the Middle School, vol. 7, no. 9 (May): 517-520, 2002.
- [3] C. M. Halpern, P. A. Halpern, *Using Creative Writing and Literature in Mathematics Classes*, Mathematics Teaching in the Middle School, vol. 11, no. 5 (December/January): 226-230, 2005/2006.
- [4] S. Kuntze, S. Prediger, *Ich schreibe, also denk' ich. Über Mathematik schreiben*. Praxis der Mathematik in der Schule 47(5), 2005.
- [5] Z. Kurnik, *Jezik u nastavi matematike*. Matematika i škola 33: 99-105, 2006.
- [6] H. Maier, *Schreiben im Mathematikunterricht*. mathematik lehren 99 (April): 10-13, 2000.
- [7] *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, HNOS, MZOŠ, Zagreb, 2006.
- [8] *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, USA, 2000.
- [9] *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe*, Institut für Didaktik der Mathematik, IFF, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Austria, 2007.