Zabavna matematika

Zdravko Kurnik, Zagreb

Prvi dojam koji kod učenika i nastavnika matematike izaziva gornji naslov jest: matematika i zabava?! O matematici se uobičajilo mišljenje kao o teškom nastavnom predmetu, za učenje kojega je potrebno uložiti dosta vremena, napora i truda. To je točno. Stjecanje znanja ne mora biti brzo i lagano, pogotovo ako se radi o vrijednim znanjima koja su korisna u mnogim područjima ljudske djelatnosti. Mogu li svi učenici svladati poteškoće koje se javljaju pri učenju matematike? Mnogi ljudi smatraju, među njima nažalost i neki nastavnici matematike, da postoje učenici koji to ne mogu, učenici koji "nisu za matematiku". To nije točno. Svaki učenik ima određene sposobnosti koje su dovoljne za praćenje, svladavanje i usvajanje matematičkih sadržaja propisanih nastavnim programom. Poželjan je samo drukčiji pristup matematici i nastavi matematike.

Drugi dojam je nešto realnija slika matematike. Učenici se mogu prisjetiti da su se s neobičnim matematičkim zadacima već susretali u matematičkim časopisima za učenike i drugdje, a nastavnike matematike možemo podsjetiti da se u nekim školama već povremeno drukčije radi, uvode se novi oblici rada sa zanimljivim i zabavnim matematičkim sadržajima koji ublažuju težinu nastavnog predmeta. Tako dolazimo do spoznaje da matematika može biti lakša i zabavna, da je zabavna matematika tu kraj nas, jedino u nastavi matematike još nije našla svoje stalno mjesto. Mogućnosti novih oblika rada u kojima dolazi do izražaja element zabavnosti matematike su raznovrsne:

zabavni sati, zabavni matematički zadaci, matematički kvizovi, matematičke igre, izrada panoa sa zanimljivim i zabavnim matematičkim sadržajima, matematičke križaljke, matematika u prirodi, školski časopis.

Učenicima koji su skloni matematici ona je već dovoljno zanimljiva i zabavna već sama po sebi. Matematika može postati zanimljivija i drugim učenicima ako se nastava matematike prožme zabavnim sadržajima.

U ovom članku riječ će biti o zabavnim zadacima. Izbor zabavnih zadataka je velik. Gotovo za svaku nastavnu temu, za svaku nastavnu jedinicu, za svaki matematički pojam može se pronaći niz zadataka koji o tome "pričaju" na zabavan način.

Što su zapravo zabavni zadaci? Evo glavnih značajki kojima se odlikuje takva vrsta zadataka i po kojima ih možemo prepoznati:

1) Zabavni zadaci su matematičke minijature za čije je rješavanje dovoljno najosnovnije znanje iz aritmetike, algebre i geometrije.
2) Formulacije zadataka su jednostavne i svakome razumljive.
3) Tekstovi su pisani u obliku malih duhovitih pričica iz svakidašnjeg života.
4) Veće matematičko predznanje nije uvijek garancija bržeg rješavanja.
5) Problemi nisu uvijek lagani, mnogi od njih zahtijevaju priličan umni napor, logičko rasuđivanje, a posebno domišljatost u pronalaženju puta prema njihovom rješenju.
6) Važnu ulogu u ljepoti takvih zadataka često igraju i duhovite ilustracije.
7) Osnovne vrijednosti: razvijanje logičkog rasuđivanja i domišljatosti, pobuđivanje interesa za matematiku, popularizacija matematike.

Probleme iz zabavne matematike prije svega treba ponuditi učenicima nižih razreda, jer je kod njih najrazvijenija "radoznalost uma", ali i učenicima viših razreda zbog različitog stupnja težine problema. Zabavni zadatak može biti lijep uvodni motivirajući primjer prije obrade nekog matematičkog pojma ili osvježenje ponekad krute nastavne situacije.

Područja zabavne matematike: *brojevi, brojevi i slova u likovima, geometrijska tijela, igre s brojevima, iste znamenke, jednim potezom olovke, kombinatorni problemi, likovi, logičke minijature, magični kvadrati, matematičke igre, pokrivanje likova, računski kriptogrami, razrezivanje likova, sastavljanje likova, šibice i štapići, testovi* i dr.

***

"Prošetajmo" malo nastavnim programom i ilustrirajmo prirodu zabavnih zadataka u odabranim nastavnim jedinicama.

Zbrajanje prirodnih brojeva

Računajte s nama. Nastavnik matematike Sedmak bio je toga jutra dobro raspoložen. Razred je odahnuo, ali je znao da će biti dosta posla. Profesor je počeo sat problemom.

– Malo ćemo kombinirati i računati. Evo, pogledajte ovaj račun zbrajanja. S jedne strane sve je u redu, jer je JEDAN + JEDAN + PET zaista SEDAM. Ali, to nije sve!

– Već znamo! – povikao je razred. – Sigurno treba devet različitih slova A, D, E, J, M, N, P, S i T zamijeniti brojkama od 0 do 9 tako da račun zbrajanja i na taj način bude točan i sigurno ima više rješenja.

– Pa kad znate, na posao! – završio je Sedmak.

$$\begin{array}{r} \mathrm{P\,E\,T} \\ \mathrm{J\,E\,D\,A\,N} \\ +\ \mathrm{J\,E\,D\,A\,N} \\ \hline \mathrm{S\,E\,D\,A\,M} \end{array}$$

Rješenje:

Postoji 9 zamjena: ADEJMNPST = 019346872, 029164738, 039287654, 039278651, 069278351, 079164238, 069287354, 139284650, 169284350.

Metodički komentar.

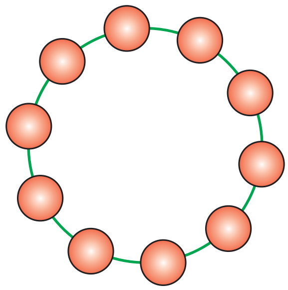
Uobičajeno zbrajanje prirodnih brojeva ovdje je povezano s kombiniranjem i logičkim zaključivanjem. Prvi korak je jedna nužnost: E = 9. Sljedeći koraci: A ne može biti veći od 1, a S od 3. Itd. Od učenika se može zahtijevati "jedno", "što više" ili "sva" rješenja. Potrebna je provjera zbrajanja.

Djeljivost prirodnih brojeva

3, 5 ili 7. Časopis Numerus u svome ljetnom broju kao nagradni je zadatak donio sljedeći problem:

"Na kružnici je nanizano deset praznih kružića. U te kružiće treba upisati brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 tako da zbroj nikoja dva susjedna broja ne bude djeljiv s 3, 5 ili 7. Tri izvučena rješavača bit će nagrađena s 3, 5, odnosno 7 matematičkih knjiga."

Srećko je odlučio sudjelovati u natječaju, ali se zabrinuo, jer nije znao odakle početi. No, to i nije tako teško odrediti, zar ne?



Rješenje:

Treba promatrati moguće susjede svakog od deset brojeva. Tada se iz tablice susjeda nalazi da susjedi broja 2 mogu biti samo brojevi 6 i 9, a susjedi broja 4 samo brojevi 7 i 9. Od brojeva 2 i 4 treba početi. Konačno, u kružiće se upisuju redom brojevi 2, 6, 5, 8, 3, 1, 10, 7, 4 i 9.

Prosti brojevi

Popunjavanje kvadrata. Nastavnik Prostić sat matematike završio je riječima:

– Za kraj jedna glavolomka. Naučili smo što su prosti brojevi. Prostih brojeva manjih od 100 ima 25. To su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 i 97. Evo, iz ove skupine izdvajam prvih devet neparnih prostih brojeva: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23 i 29. Te brojeve upišite u kvadrat 3 × 3, ali tako da zbrojevi brojeva u retcima i stupcima budu također prosti brojevi i to različiti od upisanih. Ovu glavolomku nastojte riješiti do idućeg sata.

– Ova glavolomka već mi je slomila sve u glavi! – čulo se iz zadnje klupe.

Rješenje: Vidite crtež!

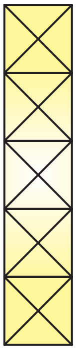
3	23	5
11	7	19
17	13	29

Metodički komentar.

Zabavni zadatak nije lagan, ali izoštrava um i razvija mišljenje. Sadrži i nešto novo i poučno.

Skupovi točaka u ravnini

Čega ima više? Sestre Ivana i Ines sjele su nakon ručka za svoje radne stolove. Svaka sestra napravila je model inicijala I svojega imena. Zatim su obje podijelile model najprije na kvadrate, a onda povlačenjem njihovih dijagonala i na pravokutne trokute.



– Ja ću prebrojavati paralelograme – rekla je Ivana.

– Dobro. Meni ostaju pravokutni trokuti – složila se Ines.

Usput pala je i oklada i sestru s većim brojem likova čekala je čokolada.

Tko je dobio (č)ok(o)ladu?

Rješenje:

Ines. Na modelu ima 48 pravokutnih trokuta i 39 paralelograma.

Razlomci

Beduini i žedni putnik. Pod užarenim pustinjskim suncem tri beduina naišla su na zalutalog i žednog putnika. Prvi beduin imao je 10 litara vode, drugi 7, a treći 6. Nakon kraćeg vijećanja beduini su odlučili da svu vodu podijele na četiri jednaka dijela. Ubrzo je iscrpljeni putnik utažio žeđ. Presretan zbog neočekivanog spasa on je u znak zahvalnosti sav imetak koji je imao kod sebe, 23 zlatnika, razdijelio beduinima i to tako da je prvom beduinu dao 10 zlatnika, drugom 7, a trećem 6, smatrajući to obzirom na količine vode pravednom podjelom.

Je li ova podjela zlatnika zaista pravedna?

Rješenje:

Nije. Ukupna količina vode je 23 litre. Svaki od četvorice dobio je $\frac{23}{4}$ litara vode. To znači da je zalutali putnik od prvog beduina dobio $\frac{17}{4}$, od drugog $\frac{5}{4}$, a od trećeg $\frac{1}{4}$ litre vode. Pravedna podjela je 17, 5 i 1 zlatnik.

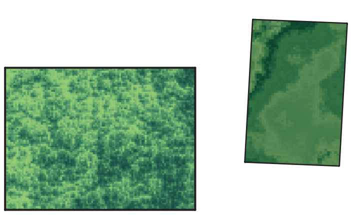
Metodički komentar.

Lijep primjer za razlomke! Osim matematičkog sadržaja problem ima i jedan drugi sadržaj koji je usko povezan sa svakidašnjim životom jednog nama egzotičnog kraja. Tekst zadataka budi pred očima rješavatelja niz neobičnih slika: Afrika, pustinja, beduini, deve, vreli pijesak, žarko sunce. Vrijedna korelacija sa zemljopisom!

***

Zadatak L. N. Tolstoja. Skupina kosaca trebala je pokositi dvije livade od kojih je jedna dva puta veća od druge. Polovinu dana skupina je kosila veću livadu. Zatim se skupina podijelila na dvije polovice: prva polovica ostala je na većoj livadi i dokosila je do večeri, druga polovica kosila je manju livadu na kojoj je navečer ostao komad koji je drugog dana pokosio jedan kosac za samo jedan dan rada.

Koliko je kosaca brojila skupina?



Rješenje:

(Tolstoj) Ako je veću livadu pola dana kosila cijela skupina i pola dana polovica skupine, to je jasno da polovica skupine za pola dana pokosi $\frac{1}{3}$ veće livade. Dakle, na manjoj livadi ostao je nepokošen komad veličine $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, tj. $\frac{1}{6}$. Ako jedan kosac za dan pokosi $\frac{1}{6}$ (veće) livade, a pokošeno je bilo $\frac{6}{6}+\frac{2}{6}$, kosaca je bilo 8.

Metodički komentar.

Zanimljivost ovog zadatka povećava činjenica da je zadatak sastavio veliki ruski pisac. To ne čudi, jer se Tolstoj u rodnoj Jasnoj Poljani bavio i pedagoškim radom.

Linearna jednadžba

Drago kamenje i draga djeca. Kolekcionar dragog kamenja ostavio je poslije smrti svojoj dragoj djeci veliko nasljedstvo. Bio je ljubitelj matematike, pa je na ostavinskoj raspravi kućni odvjetnik čitao ovu "matematičku" oporuku:

– Prvo dijete dobiva 10 kamena i $\frac{1}{6}$ ostatka, drugo dijete dobiva 20 kamena i $\frac{1}{6}$ novog ostatka, treće dijete dobiva 30 kamena i $\frac{1}{6}$ novog ostatka itd.

– Zar to nije nepravedno? – upitao je najmlađi sin.

– Ne bojte se! Svako od vas dobiva isti broj komada dragog kamenja! – objasnio je odvjetnik.

Koliko je djece imao ovaj kolekcionar i kako veliko nasljedstvo im je ostavio?

Rješenje:

Neka je x veličina nasljedstva. Prvo dijete dobiva $10 + \frac{1}{6}(x - 10)$, tj. $\frac{x}{6} + \frac{25}{3}$ dragih kamena, drugo dijete dobiva $20 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x}{6} - \frac{25}{3} - 20\right)$, tj. $\frac{5x}{36} + \frac{275}{18}$ dragih kamena itd.

Izjednačavanjem ovih dijelova dobivamo jednadžbu

$$\frac{x}{6} + \frac{25}{3} = \frac{5x}{36} + \frac{275}{18}.$$

Rješenje jednadžbe je $x = 250$.

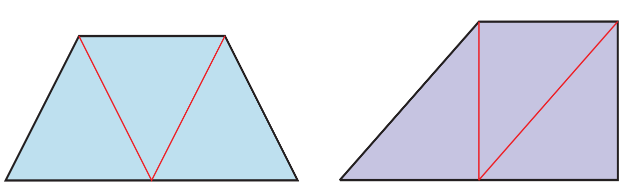
Prema tome, nasljedstvo je sadržavalo 250 dragih kamena, svaki dio imao je 50 dragih kamena, a to znači da je bilo petoro djece.

Trapez

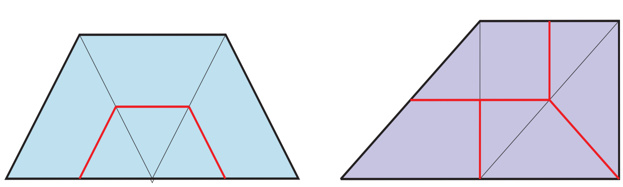
Podjela. Na satu geometrije učenici učitelja Bistrića proučavali su četverokute. Podijeljeni u grupe brzo su rješavali sve postavljene probleme, osim onoga na kraju. Bio je to dodatni zadatak, malo teži, tako da se u jednom trenutku nekim učenicima oteo uzvik:

– Pomoć!

Bistrić je brzo razbistrio situaciju. O čemu je bila riječ? Riječ je o dva trapeza. Prvi je sastavljen od tri sukladna jednakostranična trokuta, a drugi od tri sukladna jednakokračna pravokutna trokuta. A trebalo je ta dva trapeza podijeliti na četiri isto takva trapeza. Kako se to radi?



Rješenje: Vidite crteže!



Metodički komentar. Osim što je ovo neobičan zadatak o trapezu, zadatak sadrži i nešto više: sukladnost i sličnost trapeza.

Sustav jednadžbi

Godine. Djed Franjo cijeli je život bio pravi stručnjak za kompliciranje jednostavnih stvari. Evo kako je on u poznim godinama, na proslavi zlatnog pira, odgovorio na pitanje novinara koliko mu je godina:

– Ja imam $\frac{5}{11}$ godina više nego je imala moja žena, Štefanija, tada kada sam ja imao toliko godina koliko ona ima sada. Kada Štefek bude imala toliko godina koliko ja imam sada, mi ćemo zajedno, ako nas Bog poživi, imati 2007 godina.

– 207 godina, Franjo, 207! – prijekorno je zaklimala glavom baka Štefanija.

Ipak, sve je jasno, zar ne!?

Rješenje:

Označimo s x broj godina djeda Franje, a s y broj godina bake Štefanije. Tada prvi dio uvjeta možemo pisati u obliku jednadžbe $x = 2y - x + \frac{5}{11}(2y - x)$, a drugi u obliku jednadžbe $(2x - y) + x = 207$. Rješavanjem sustava dobivamo $x = 96$, $y = 81$. Djed Franjo ima 96 godina, a baka Štefanija 81 godinu.

Metodički komentar.

Ovo je primjer tekstualnog zadatka koji najprije treba zapisati matematičkim jezikom postavljanje jednadžbi (Descartesova metoda!). Postavljanje jednadžbi sedmoškolcima nije ovdje jednostavno.

Potencije

Dva niza brojeva. Brat i sestra Veselić vratili su se iz škole zadovoljni. Sat matematike bio je posljednji, ali je protekao dosta brzo. Posebno je bio zanimljiv onaj dio u kojemu su se redali neobični zadaci. Odmah su prešli na rješavanje domaće zadaće u kojoj je bio i jedan neobičan zadatak. Brat je čitao s listića:

"Pogledajte pažljivo ova dva niza brojeva:

$$1,\ 6,\ 7,\ 17,\ 18,\ 23;$$
$$2,\ 3,\ 11,\ 13,\ 21,\ 22.$$

Lako se uočava da je zbroj brojeva prvoga niza jednak zbroju brojeva drugoga niza. Imaju li ti nizovi još koje svojstvo? Pokušajte s potencijama."

– Evo, ja već kvadriram – rekla je sestra.

Što su otkrili brat i sestra Veselić?

Rješenje:

Veselići su otkrili da vrijede i sljedeće dvije tvrdnje:

1) Zbroj kvadrata brojeva prvoga niza jednak je zbroju kvadrata brojeva drugoga niza.

2) Zbroj kubova brojeva prvoga niza jednak je zbroju kubova brojeva drugoga niza.

Metodički komentar.

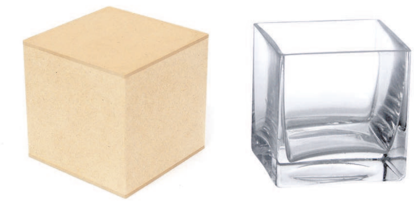
Osim standardnog uvježbavanja potencija, rješavajući ovaj zadatak učenici, dakle, mogu doći do dva "otkrića". To je vrijedan čin spoznaje.

Kocka

"Nemoguća" mjerenja. Učitelj matematike Kubus ponekad zna iznenaditi svoj razred zadavanjem na prvi pogled nerješivih problema. Na posljednji sat geometrije donio je drvenu kocku i staklenu posudu u obliku kocke i učenike zbunio sa sljedeća dva pitanja:

1) Može li se pomoću ravnala s mjerilom izmjeriti duljina dijagonale drvene kocke?

2) Može li se u ovu praznu staklenu posudu uliti vode točno do $\frac{1}{6}$ obujma posude bez uporabe mjernih instrumenata?



Rješenje:

Odgovor u oba slučaja je potvrdan.

1) Kocka se postavi na kraj pravokutnog stola, a onda pomakne duž ruba za duljinu svojega brida. Sada su u prostoru istaknute dvije točke (jedan vrh kocke i krajnja točka ruba stola) čija je udaljenost jednaka duljini dijagonale kocke i ona se može izmjeriti.

2) Posuda se nagne tako da je jedan njezin vrh dolje i ulijeva se voda sve dok njezina razina ne bude sadržavala tri vrha koji su krajevi triju bridova iz istaknutog donjeg vrha. Sada voda zauzima prostor trostrane piramide čiji je volumen jednak $\frac{1}{6}$ volumena kocke.

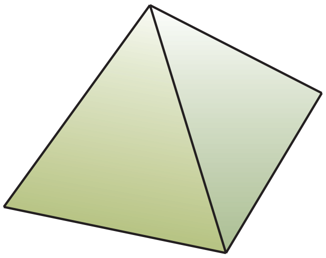
Piramida

Šator. Izviđači su odlučili napraviti šator u obliku pravilne trostrane piramide s međusobno okomitim pobočnim bridovima duljine 3 m.

– U šatoru će moći uspravno stajati i naš dvometraš Zoran – zadovoljno je rekao Josip.

– Varaš se, Josipe. Zoran će se dobro pogrbiti. A to čeka čak i mene s mojih 175 cm – tvrdio je Perica.

Tko je u pravu?



Rješenje:

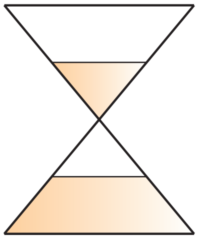
Odgovor leži u visini šatora. Osnovka piramide je jednakostranični trokut s duljinom stranice $3\sqrt{2}$ m i površinom $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ m^2. Obujam piramide je $\frac{9}{2}$ m^3. Na temelju tih činjenica nalazimo da je duljina visine šatora jednaka $\sqrt{3}$ m, tj. približno 1.73 m. U pravu je Perica.

Stožac

Na kvizu. Pješčani sat u televizijskom kvizu kojim se mjeri vrijeme predviđeno za odgovore čine dva jednaka stošca, spojena kod vrhova. Gornji je potpuno ispunjen pijeskom koji u donji stožac ravnomjerno iscuri za 4 minute.

U jednoj emisiji natjecatelj je, izvršavajući zadatak u roku od 4 minute, primijetio da je gornji rub pijeska došao do polovice visine stošca. – Još bar 1 minuta – pomislio je.

Je li natjecatelj u pravu i koliko je točno vremena prošlo od početka mjerenja?



Rješenje:

Nije. Budući da je gornji rub pijeska na polovici visine, preostali pijesak gore ispunjava stožac četiri puta manje osnovke i dva puta manje duljine visine, tj. osam puta manji prostor. Od početka mjerenja prošle su 3.5 minute. Natjecatelj ima za razmišljanje još samo 30 sekundi.

Sfera

Po meridijanima i paralelama. U popularnom geografskom časopisu "Meridijani" postavljeno je ovo zanimljivo pitanje:

"Gdje se na Zemlji nalaze sva mjesta iz kojih se kretanjem, najprije $5\,000$ km po meridijanu, zatim $5\,000$ km po paraleli, te ponovo $5\,000$ km po meridijanu, na kraju stigne u polazno mjesto? Pritom se svaki dio puta, prije prijelaza s meridijana na paralelu i obrnuto, smije prijeći samo jedanput."

Kako glasi odgovor na ovo pitanje?

Rješenje:

Sjeverni i Južni pol su dva tražena mjesta. Ostala nalazimo ovako: neka su a i b one dvije paralele kojima je opseg $5\,000$ km. Postoje po dvije paralele a_1, a_2 i b_1, b_2 koje su s paralelama a i b povezane dijelovima meridijana duljine $5\,000$ km. Sve točke te četiri paralele također su rješenja problema.

Metodički komentar.

Poučna korelacija sa zemljopisom.

***

Ovdje završavamo s prikazom zabavne matematike. Nadamo se da je čitatelj u zabavnim zadacima, koji su odabrani za ilustraciju, uočio ono što se željelo istaknuti. Poželjno bi bilo da svoju nastavu obogati pokojim zabavnim zadatkom, a još bi bilo poželjnije da sam osmisli zabavne zadatke kad god primijeti da su standardni zadaci, koje nude udžbenici i zbirke zadataka, previše kruti i jednolični i da svojim formulacijama najčešće zamaraju učenike. Jer, matematika uistinu može biti i zabavna!