

# Kosa projekcija

Zdravko Kurnik, Zagreb



Nastava matematike je složen i zahtjevan proces, imamo li u vidu samo činjenicu da je matematika apstraktna znanost. Kako učenicima približiti apstraktne matematičke sadržaje? Potreban stupanj apstrakcije učenici će lakše postići preko osjetilne spoznaje. U tu svrhu razvijaju se i koriste različita sredstva koja omogućuju taj lakši prijelaz od konkretnog do apstraktnog. Vezu najčešće čini zornost.

Postoje različiti oblici zornosti, pa je i krug zornih sredstava vrlo širok. Uporaba zornih sredstava ovisi o uzrastu učenika i razini njihovog apstraktnog mišljenja. Nužnost primjene zornih sredstava posebno dolazi do izražaja pri proučavanju geometrije prostora, stereometrije. Krugu zornih sredstava za poučavanje geometrije prostora pripadaju: *ploča, crteži, slike, modeli geometrijskih likova, modeli geometrijskih tijela, grafoskop i računalo.*

U ovom radu opisat ćemo zorno sredstvo koje u nastavnom procesu igra važnu i neizostavnu ulogu – *crtež*. Težište rada je na jednoj metodi koja omogućuju prikazivanje prostornih objekata u ravnini – *kosoj projekciji*.

*Crteži*

## Crteži

U nastavnom procesu crteži su najčešće zorno sredstvo prikazivanja geometrijskih sadržaja. Nastavnik matematike crteže izrađuje na ploči ili predočuje na grafoskopu ili računalu, a učenici ih izrađuju u svojim bilježnicama. Postoji određena

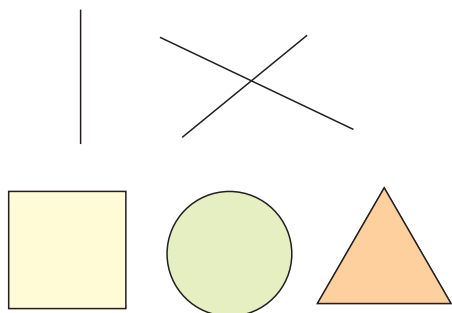
razlika u djelotvornosti primjene crteža u planimetriji i stereometriji.

Crtež ravninskog lika u ravnini vjerno predočuje oblik lika i zato se može neposredno koristiti za izučavanje njegovih svojstava.

Crtež prostornog tijela je samo projekcija toga tijela na ravninu crteža, pa se na njemu mijenjaju njegov oblik i međusobni položaj njegovih elemenata. Crtež nas tada lako može zavarati.

### Primjer 1.

Jednostavni crteži geometrijskih objekata. Može li sa sigurnošću reći što predstavljaju ti crteži?



Crteži su vrlo jednostavni, ali ipak ne možemo dati jednoznačan odgovor na postavljeno pitanje.

Crteži najprije mogu predstavljati ravninske likove u ravnini slike. Tada je jasno da se radi o dužini, pravcima koji se sijeku, kvadratu, krugu i jednakostraničnom trokutu.

Ako su to crteži prostornih objekata, onda odgovor na pitanje nije tako jednostavan. U tom slučaju mogući su sljedeći opisi crteža:

Prvi crtež: projekcija dužine ili nekog lika (mnogokut, kružnica, krug) koji je u ravnini okomitoj na ravninu slike.

Drugi crtež: projekcija pravaca koji se sijeku, projekcija mimoilaznih pravaca.

Treći crtež: projekcija paralelograma ili četverostrane prizme.

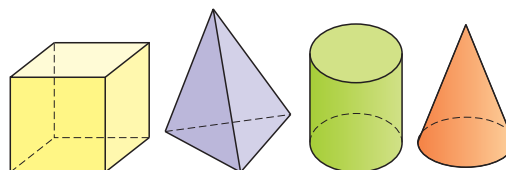
Četvrti crtež: projekcija kruga, elipse, valjka, stošca, kugle (takva je slika Sunca u našem oku) ili elipsoida (takvo tijelo je Zemlja).

Peti crtež: projekcija trokuta, trostrane prizme, trostrane piramide ili četverostrane piramide.

\*\*\*

### Primjer 2.

Složeniji crteži geometrijskih tijela.



U ovom primjeru situacija je sasvim drukčija. Crteži su složeniji, ali ono što je važnije jest činjenica da su opisi crteža gotovo jedinstveni i prirodni: kocka, piramida, valjak i stožac.

Jedino što učenike može zbuniti jest da je osnovka kocke paralelogram a osnovke oblika tijela elipse, a ne kvadrat i kružnice. Može ih zbuniti i mogućnost interpretacije triju crteža kao projekcija prizme kojoj je osnovka paralelogram (paralelepiped) i valjka i stošca kojima su osnovke elipse (eliptički valjak i eliptički stožac), a koji se u nastavi geometrije ne proučavaju. Zato takvu interpretaciju crteža treba zanemariti.

\*\*\*

Ovi primjeri ukazuju na činjenicu koliko je važna pravilna interpretacija crteža prostornih objekata za proučavanja i razumijevanje odnosa među njima. Pred nastavnikom matematike je stoga metodičko pitanje:

*Kako učenike naučiti pravilno "čitati" crtež prostornog objekta?*

Jedan odgovor na ovo pitanje jest povezivanje dvaju zornih sredstava: crteža i modela geometrijskih tijela. Promatraju li, primjerice, učenici drvenu kocku iz različitih daljina i različitih smjerova, slike kocke u njihovim očima neće uvijek biti iste. Promatraju li valjkastu staklenu čašu odozdo sa strane ili odozgo sa strane, otvor i dno čaše neće vidjeti kao kružnice, već kao elipse. Promatraju li veću loptu iz veće daljine, vidjet će krug.

Pritom treba naglasiti da primjena i jednog i drugog zornog sredstva treba biti podređena osnovnom cilju: razvoju prostornog zora učenika. Umijeće "čitanja" različitih crteža i shema moguće je postići samo na višem stupnju razvoja učenika. Za provjeru razine toga umijeća kod njegovih učenika nastavniku matematike uvijek stoji na raspolaganju pitanje:

*Što predstavlja ovaj crtež?*

### Ploča, grafoskop, računalo

**Ploča** je osnovno zorno sredstvo u učiteljevom radu i posrednik u prenošenju znanja učenicima. Zato crteži na ploči moraju biti dobro osmišljeni i uredni kako bi primjereno pridonijeli ostvarenju ciljeva nastave. Kako učitelj crta na ploči, tako učenici popunjavaju stranice svojih bilježnica. Crtanju na ploči i odnosu učitelj-ploča-učenici treba posvetiti pravu pozornost.

**Grafoskop** često zamjenjuje ploču. Prednost rada s grafoskopom je u tome što su crteži ranije uredno pripremljeni na prozirnicama, a na nastavnom satu se samo demonstriraju. Demonstracija na grafoskopu je nezamjenjiva ako se radi o složenijim crtežima i slikama. Slabost ovog prikaza je statičnost crteža. Međutim, učitelj i pored toga treba biti oprezan, jer ubrzavanje rada koje se ipak postiže primjenom grafoskopa može učenicima stvarati poteškoće pri usvajanju matematičkih sadržaja, pa bi na taj način ta primjena imala negativan učinak.

**Računalo.** Danas postoji niz računalnih programa koji su prvenstveno namijenjeni proučavanju i rješavanju geometrijskih problema i za uporabu u učionici. Posebno su korisni i djelotvorni programi dinamične geometrije (*The Geometer's Sketchpad*, *GeoGebra* i dr.). Oni su idealno sredstvo ostvarenja načela zornosti. Pomoću njih učenici mogu ne samo dobiti besprijekoran crtež, već u svakome trenutku i cijeli postupak nastajanja crteža. Na taj način razumijevanje obrade geometrijskih sadržaja postaje bolje i brže, a znanje trajnije.

### Kosa projekcija

U primjerima 1 i 2 zanimao nas je odgovor na pitanje što predstavljaju prikazani crteži. Vidjeli smo da jednostavnost ne omogućuje uvijek i bolje razumijevanje. Složeniji crteži u primjeru 2 jače asociraju na geometrijska tijela koja su na njima. Sada se postavlja drugo pitanje: kako su nastali crteži iz primjera 2? Potražimo odgovor.

Postoje različite metode koje omogućuju prikazivanje prostornih objekata u ravnini. Opisat ćemo najjednostavniju od njih koja se zasniva na paralelnom projiciranju. Paralelnim projiciranjem prostora na jednu ravninu dobivamo predočivanje objekata samo u jednoj projekciji. Ovakvom projekcijom oblik i veličina objekta nisu u prostoru određeni. Da bismo to postigli, objekt vežemo uz jedan prostorni pravokutni koordinatni sustav  $Oxyz$  s ishodištem  $O$  i osima  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i to na taj način da se smjerovi tih osiju podudaraju sa smjerovima triju dimenzija objekta. Zatim se cijela figura paralelno projicira na neku ravninu – ravninu slike.

Ako između triju osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dvije odaberemo da budu paralelne s ravninom slike, najčešće osi  $x$  i  $z$ , a smjer projiciranja kos, onda se takva projekcija zove – kosa projekcija. Svi bridovi nekog tijela koji su paralelni s osima  $x$  i  $z$  projiciraju se na ravninu slike u pravoj veličini a međusobna okomitost ostaje sačuvana. No treća os  $y$ , koja je okomita na ravninu slike, projicira se koso u položaj  $\bar{y}$ . Duljina  $\bar{d}$  kose projekcije neke dužine na osi  $y$  može biti veća, jednaka ili manja od duljine  $d$  dane dužine.

Odredbene veličine:

- Prva odredbena veličina kose projekcije je kut  $\alpha$  što ga os  $\bar{y}$  zatvara s osi  $x$ , tj.  $\alpha = \sphericalangle(y, x)$ .
- Druga odredbena veličina kose projekcije je prikrata  $n$ , koja se definira kao omjer duljine  $\bar{d}$  kose projekcije neke dužine na osi  $y$  i duljine  $d$  same dužine, tj.  $n = \frac{\bar{d}}{d}$ .

S veličinama  $\alpha$  i  $n$  kosa projekcija potpuno je određena.

Rad u kosoj projekciji pojednostavnit ćemo što je više moguće. Nećemo promatrati ni cijeli prostor,

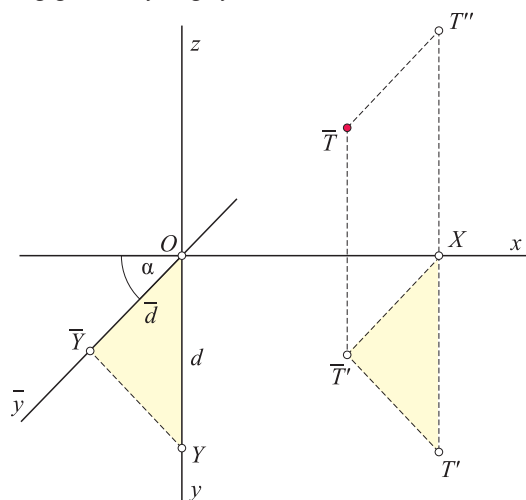
već samo one točke prostora koje su ispred ravnine slike (ravnina  $xz$ , u nastavi je to ravnina ploče) i iznad ravnine baze (ravnina  $xy$ , u nastavi je to ravnina poda).

Na slici lijevo su svi oni elementi kose projekcije koji su gore opisani. Desno je postupak određivanja kose projekcije neke točke  $T$  prostora. Opišimo taj postupak.

Položaj točke  $T$  u prostoru određen je s njezine dvije ortogonalne projekcije: ortogonalne projekcije  $T'$  na ravninu  $xy$  (tlocrt) i ortogonalne projekcije  $T''$  na ravninu  $xz$  (nacrt). Simbolično zapisujemo:  $T(T', T'')$ . Točka  $T$  je za duljinu  $|XT'|$  ispred ravnine slike, a za duljinu  $|XT''|$  iznad ravnine baze.

Pomoću sličnosti trokuta  $XT'T'$  i  $OY\bar{Y}$  najprije određujemo kosu projekciju  $\bar{T}$  tlocrta  $T'$ . Ova konstrukcija primjenjuje se pri određivanju kose projekcije nekog lika u ravnini baze.

Zatim se nanošenjem duljine  $|XT'|$  u točki  $\bar{T}$  dobiva kosa projekcija  $\bar{T}$  točke  $T$ . Ova konstrukcija primjenjuje se pri određivanju kose projekcije nekog geometrijskog tijela.



Svojstva kose projekcije:

- 1) Trokuti  $XT'T'$  i  $OY\bar{Y}$  uvijek su slični.
- 2) Dužina koja leži u ravnini paralelnoj s ravninom slike projicira se u dužinu paralelnu s njom i jednake duljine.

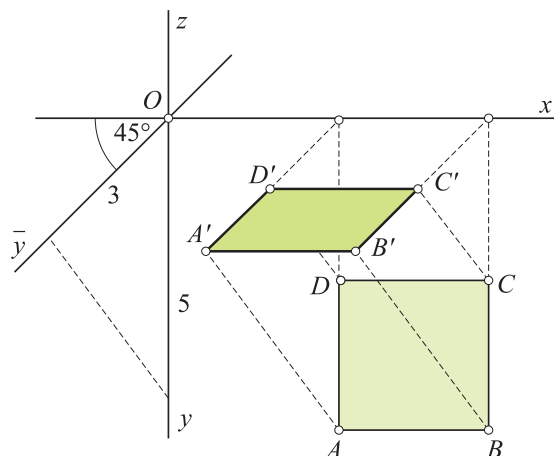
- 3) Kut koji leži u ravnini paralelnoj s ravninom slike projicira se u pravoj veličini.
- 4) Lik koji leži u ravnini paralelnoj s ravninom slike projicira se u pravoj veličini.
- 5) Kosa projekcija pravca okomitog na ravninu baze okomita je na os  $x$ .
- 6) Kosa projekcija pravca okomitog na ravninu slike paralelna je s osi  $\bar{y}$ .
- 7) Paralelni pravci preslikavaju se u paralelne pravce (osim ako nisu paralelni sa smjerom projiciranja).
- 8) Kosa projekcija kružnice u općem položaju je elipsa.

Razmotrimo nekoliko primjera kose projekcije u kojima ćete lako uočiti neka pojednostavljena.

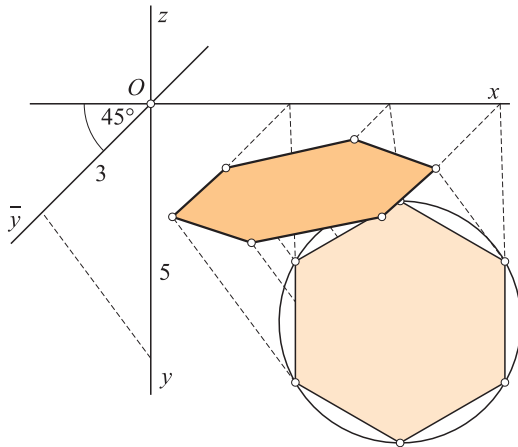
### Primjer 3.

Konstrukcije kosih projekcija mnogokuta i uglatih tijela.

Za ilustraciju konstruirat ćemo kose projekcije kvadrata i pravilnog šesterokuta u kosoj projekciji zadanoj sa  $\alpha = 45^\circ$ ,  $n = \frac{3}{5}$ . Čitateljima preporučamo da na temelju navedenih svojstava kose projekcije "pročitaju" i opišu sljedeće crteže:



## iz rječnika metodike



Vidimo da je kosa projekcija kvadrata paralelogram, a pravilnog šesterokuta centralnosimetričan šesterokut. Slično se konstruiraju kose projekcije i drugih mnogokuta.

Sve te konstrukcije uporabljemo pri crtanju kosih projekcija uglatih tijela. Tako je kosa projekcija kvadrata baza pri crtanju kose projekcije kocke u primjeru 2, a može još biti baza kvadratne prizme i kvadratne piramide. Dovoljno je u prvome slučaju u vrhovima baze nanijeti duljine pobočnih bridova prizme, odnosno u drugome slučaju naći kosu projekciju vrha piramide.

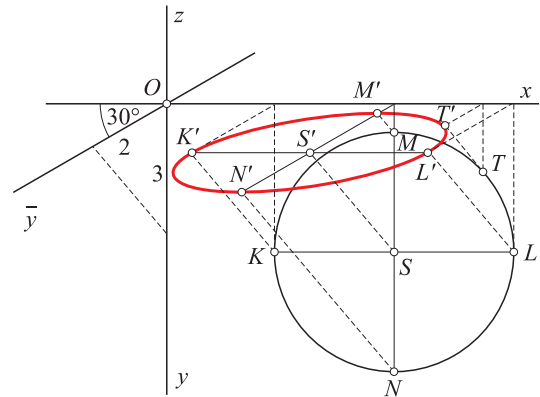
### Primjer 4.

Konstrukcije kosih projekcija kružnice i oblih tijela.

Kružnica je obodna krivulja bazâ stožaca i valjaka. Kosa projekcija kružnice općenito je elipsa. Razmotrit ćemo konstrukciju kose projekcije kružnice koja leži u ravnini  $xy$  u kosoj projekciji zadanoj sa  $\alpha = 30^\circ$ ,  $n = \frac{2}{3}$ .

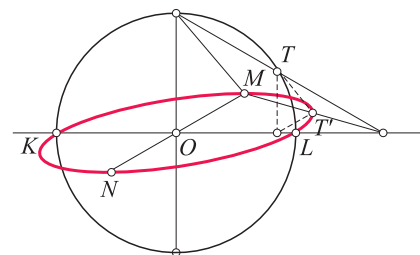
Na kružnici se odabere par okomitih promjera  $\overline{KL}$  i  $\overline{MN}$ , pri čemu je  $\overline{KL} \parallel x$ ,  $\overline{MN} \perp x$ . Kosa projekcija tih promjera je par konjugiranih promjera elipse. Sada se elipsa može konstruirati na dva načina.

Ako se kosa projekcija kružnice izrađuje u nekom računalnom programu dinamične geometrije, elipsa se crta korištenjem pridruženja  $T \rightarrow T'$  naredbom *Locus* u izborniku *Konstrukcije*. Tako je izrađena sljedeća slika.

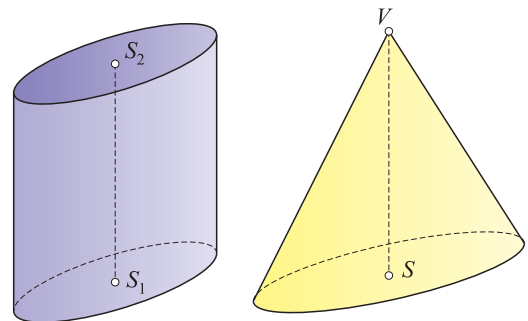


Ako se kosa projekcija kružnice crta na ploči, elipsa se crta pomoću kosih projekcija većeg broja točaka kružnice.

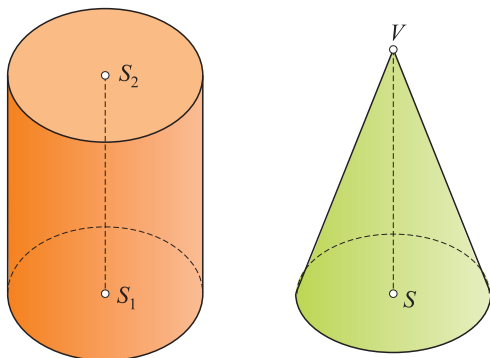
Crtanje elipse iz para konjugiranih promjera može se provesti i pomoću pridruženja koje bilo kojoj točki  $T$  kružnice nad jednim promjerom elipse na određeni način pridružuje točku  $T'$  elipse. Crtanje elipse pomoću pridruženja  $T \rightarrow T'$  vidite na donjem crtežu. Možete li crtež "pročitati" i opisati?



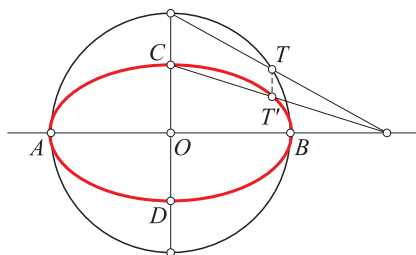
Ako se na ovaj način konstruiraju baze valjka i stošca, onda njihove kose projekcije izgledaju ovako:



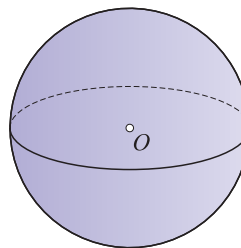
U udžbenicima matematike i u nastavi geometrije najčešće se izrađuju nešto jednostavniji crteži valjaka i stožaca. Primjerice:



Osnova za ovakvo crtanje baza valjaka i stožaca je konstrukcija elipse kada su poznate njezine osi. Osi elipse kao kose projekcije kružnice odmah se dobivaju u specijalnoj kosoj projekciji kojoj je smjer projiciranja okomit na os  $x$ . Naime, tada se promjer kružnice paralelan s osi  $x$  i drugi, okomit na os  $x$  projiciraju u osi elipse  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$ , a elipsa crta pomoću pridruženja koje bilo kojoj točki  $T$  kružnice nad velikom osi elipse na određeni način pridružuje točku  $T'$  elipse. Crtanje elipse pomoću pridruženja  $T \rightarrow T'$  vidite na donjem crtežu. Opišite ga!



Ova konstrukcija elipse primjenjuje se i pri crtanju kose projekcije kugle. Da bi se s crteža moglo zaključiti da se radi o kugli, na crtežu se uz konturu istakne i kosa projekcija jedne njezine glavne kružnice. Primjerice:



## Metodičke napomene

Izrada crteža prostornih objekata važan je segment nastave geometrije prostora. Da bi ta nastava bila učinkovita i dovela učenike do potpunog razumijevanja, izradi crteža treba posvetiti primjerenu pozornost.

Crteži se mogu izrađivati i prostoručno, ali na njima se što je vjernije moguće moraju moći uočiti neka važna svojstva proučavanih objekata (*sukladnost, sličnost, paralelnost, okomitost, vidljivost*).

U temi ima nekoliko pojmova koji se u osnovnoškolskoj matematici ne obrađuju. Objašnjenja u nastavi treba što više pojednostavniti, složenije i teže pojmove izostaviti. Da bi se postigli razumijevanje i jasnoća, neki se pojmovi moraju navesti i barem opisno ili pomoću modela učenicima približiti. Takvi pojmovi su *projiciranje, kosa projekcija, elipsa*.

Crtanje prostornih objekata u ravnini treba maksimalno iskoristiti za razvijanje zora i poučavanje učenika kako pravilno "čitati" crteže raznih objekata, ali i kako ih samostalno izrađivati.

Tema je vrlo pogodna za primjenu nekog računalnog programa dinamičke geometrije.

### Literatura:

- [1] Z. Kurnik, D. Palman, B. Pavković: ZADACI IZ NACRTNE GEOMETRIJE. MONGEOVA PROJEKCIJA, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- [2] Z. Kurnik: NASTAVA GEOMETRIJE U OSNOVNOJ ŠKOLI I ZORNA SREDSTVA, Zbornik radova Petog stručno-metodičkog skupa, Rovinj, 2001., 213 –225.
- [3] Z. Kurnik: 13 METODIČKIH RADIONICA, Matkina biblioteka – Metodička radionica, HMD, Zagreb, 2007.