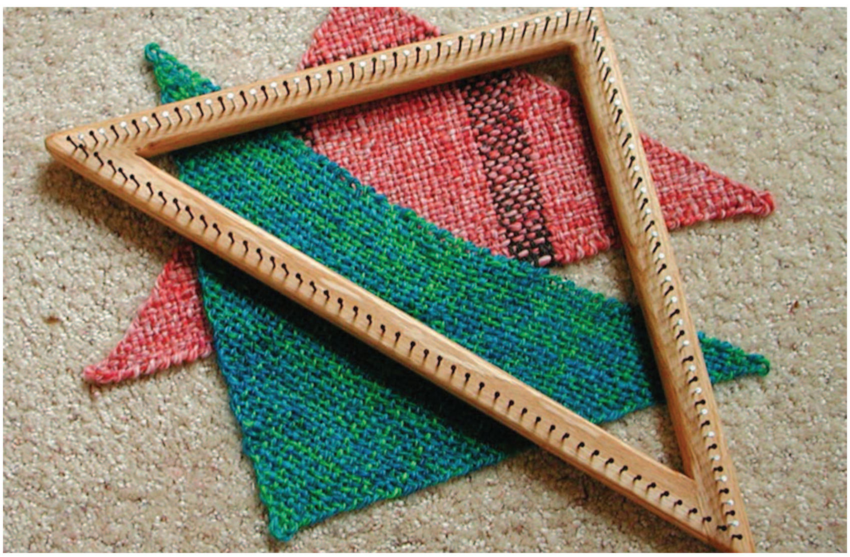
metodika

Jedan zanimljiv
zadatak iz geometrije trokuta



Šefket Arslanagić, Sarajevo

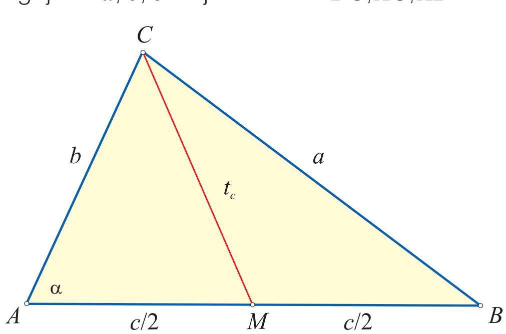
Prije nekoliko godina smo na prijamnom ispitu na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu, među ostalim zadacima iz algebre i trigonometrije dali i sljedeći zadatak iz geometrije:

U trokutu ΔABC dužina $\overline{CM}$ je težišnica iz vrha C, a točka M je polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je $|CM| = 2$ cm, $|AC| = 4$ cm i $|BM| = 2\sqrt{3}$ cm, koliko iznosi opseg i površina trokuta ΔABC?

Većina učenika koji su rješavali ovaj zadatak su krenuli od formule za duljinu težišnice koja glasi:

$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \qquad (*)$$

gdje su a, b, c duljine stranica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ redom.



Imamo sada iz $(*)$:

$$2 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2 \cdot 4^2 - (4\sqrt{3})^2},$$

a odavde

$$4 = \sqrt{2a^2 + 32 - 48}, \text{ tj.}$$

$$\sqrt{2a^2 - 16} = 4,$$

te nakon kvadriranja

$$2a^2 - 16 = 16,$$

odnosno

$$2a^2 = 32, \text{ te}$$

$$a = 4 \text{ cm.}$$

Sada je opseg trokuta $\Delta\, ABC$:

$$O = |AB| + |AC| + |BC|, \text{ tj.}$$

$$O = 4\sqrt{3} + 4 + 4,$$

$$O = 4\,(2 + \sqrt{3}) \text{ cm.}$$

Samo jedan učenik je ovaj zadatak riješio na mnogo jednostavniji način. Naime, uočio je da vrijedi:

$$4^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2,$$

tj. zbog $|AM| = |BM| = 2\sqrt{3}$ cm, zatim $|AC| = 4$ cm i $|CM| = 2$ cm:

$$|AC|^2 = |CM|^2 + |AM|^2,$$

što znači da za trokut $\Delta\, ACM$ vrijedi Pitagorin poučak pa je trokut $\Delta\, ACM$ pravokutan s pravim kutom $\sphericalangle AMC = 90^\circ$. Dakle, zbog $|BM| = |AM|$ je sada trokut $\Delta\, ABC$ jednakokračan pa je $|BC| = |AC| = 4$ cm.

Opseg trokuta $\Delta\, ABC$ je:

$$O = |AB| + 2|AC|, \text{ tj.}$$

$$O = 2|BM| + 2|AC|,$$

$$O = 2(|BM| + |AC|),$$

$$O = 2(2\sqrt{3} + 4),$$

$$O = 4(\sqrt{3} + 2) \text{ cm.}$$

Sada je lako izračunati i površinu trokuta $\Delta\, ABC$. Imamo

$$P = \frac{|AB| \cdot h_c}{2},$$

gdje je zbog $h_c = t_c = |CM| = 2$ cm:

$$P = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{2}, \text{ tj.}$$

$$P = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Da nismo ovako postupili, morali bismo koristiti Heronovu formulu za površinu trokuta $\Delta\, ACM$ koja glasi:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2};$$

tj. u našem slučaju zbog $s = \dfrac{4+2+2\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3}$

$$P_{\Delta ACM} = \sqrt{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3}-4)(3+\sqrt{3}-2)(3+\sqrt{3}-2\sqrt{3})},$$

tj.

$$P_{\Delta ACM} = \sqrt{(3+\sqrt{3})\,(3-\sqrt{3})\,(\sqrt{3}-1)\,(\sqrt{3}+1)},$$

odnosno

$$P_{\Delta ACM} = \sqrt{(9-3)\,(3-1)}$$

$$P_{\Delta ACM} = \sqrt{6 \cdot 2} = \sqrt{12}, \text{ tj.}$$

$$P_{\Delta ACM} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Kako je $|AM| = |BM|$, slijedi da je sada

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ACM},$$

odnosno

$$P_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Literatura:

[1] Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka iz elementarne matematike sa osnovama teorije*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

MATEMATIČKI REBUS

Zamijeni simbol odgovarajućom znamenkom!