Istraživačka nastava

Zdravko Kurnik, Zagreb

U nastavi matematike danas još uvijek prevladavaju tradicionalni oblici rada i nastavne metode, a njezin osnovni cilj je usvajanje gradiva. Uspješno svladavanje nastavnog gradiva često znači samo usvajanje još više novih informacija i činjenica i može rezultirati daljnjim opterećenjem učenika. Samo usvajanje znanja je **niža razina** matematičkog obrazovanja. Potrebno je podići kakvoću poučavanja, znanja i sposobnosti, osuvremeniti nastavu matematike.

1. Postavke i ciljevi

Nastavnik matematike je nositelj kakvoće odgoja i matematičkog obrazovanja. Jedan od prioriteta procesa unapređenja nastave je trajno stručno usavršavanje nastavnika. Znanje postaje glavni čimbenik. Neprimjerene i nedjelotvorne metode treba zamijeniti suvremenim nastavnim metodama. U postojećoj satnici više vremena predvidjeti za učenikov samostalan i stvaralački rad. Razviti sustav vrjednovanja i nagrađivanja darovitih učenika. Rasteretiti učenika smanjivanjem udjela enciklopedijskih sadržaja usmjerenih prema zapamćivanju i reproduciranju. Nastavu utemeljiti na procesu poučavanja umjesto isključivo na predavanju/izlaganju. Poučavanje usmjeriti prema učeniku, uvažavajući učenikove sposobnosti i naravne sklonosti. Uvesti učenika u istraživačku usmjerenu nastavu. Nastavu usmjeriti na stjecanje trajnih i uporabljivih znanja, stjecanje sposobnosti i umijeća. Razvijati sposobnosti za rješavanje problema i donošenje odluka. Osposobiti učenike za cjeloživotno učenje.

Velik dio gornjih postavki i ciljeva obrazovnog standarda u skladu je s postavkama suvremene metodike nastave matematike.

Posebno izdvajam sljedeće postavke i ciljeve: samostalan rad učenika, stvaralački rad učenika, **uvođenje učenika u istraživačku nastavu**, razvijanje sposobnosti za rješavanje problema, suvremene nastavne metode.

Oblici rada i nastavne metode za uspješnu nastavu matematike u duhu gornjih postavki trebaju biti: grupni rad, individualni rad, metoda razgovora, heuristička metoda, problemska metoda, metoda rada s tekstom i metoda demonstracije.

Očito su osnovne smjernice za osuvremenjivanje nastave pobuđivanje i pokretanje mišljenja učenika i nastojanje da dobar dio novih znanja stječu vlastitim snagama i sposobnostima. One se mogu ostvariti primjerenim izborom nastavnih oblika i nastavnih metoda. Jedna od osobina kreativnog nastavnika matematike jest upravo ovladavanje tim umijećem. Zato je potrebno preispitati uporabu svih oblika rada i nastavnih metoda i zadržati samo one koji ne sputavaju učenike. Potrebna je i češća izmjena oblika rada i nastavnih metoda.

Osuvremenjivanju nastave može pridonijeti i uvođenje novih pomagala. Tu se prije svega misli na postupno uvođenje u nastavu matematike **džepnog računala** i **računala**.

Da bi se ostvarili gore navedeni ciljevi, potrebno je povisiti razinu matematičkog obrazovanja učenika. **Viša razina** matematičkog obrazovanja podrazumijeva poučavanje umjesto predavanja, otkrivanje puta k samostalnom stvaralačkom radu učenika i razvoj njihovog mišljenja tako da oni postupno i primjereno nauče **analizirati, sintetizirati, konkretizirati, apstrahirati, inducirati, deducirati, generalizirati, specijalizirati, uočavati analogije**.

2. Teme iz nastavnih programa

Svi matematički sadržaji nose u sebi stanovitu problemnost. Zato je moguće pri obradi svakog sadržaja stvoriti najprije prikladnu problemsku situaciju i učenike staviti pred neki problem. Kako će se u daljnjem problem obrađivati ovisi o težini matematičkog sadržaja, uzrastu i predznanju učenika i umješnosti nastavnika. Već samo postavljanje problemske situacije znači dobar početak. Nas posebno zanimaju one problemske situacije koje u nastavnom procesu stvara sam nastavnik matematike s posve određenim ciljem. Taj cilj je povišenje efikasnosti nastave matematike i podizanje razine matematičkog obrazovanja učenika, a najbolje se može ostvariti uvođenjem učenika u istraživačku nastavu.

Izbor tema iz osnovnoškolske matematike pogodnih za istraživački rad učenika i primjenu džepnog računala ili računala:

V. razred: Djeljivost s 10, 5, 2, 3, 9; prosti i složeni brojevi; rastavljanje broja na proste faktore; zajednički djelitelji; zajednički višekratnici; simetrala dužine; osna simetrija; množenje decimalnih brojeva; dijeljenje decimalnih brojeva.

VI. razred: Zbroj kutova u trokutu; simetrala kuta; površina trokuta; rad sa zagradama; zbroj kutova u četverokutu; površina paralelograma i trapeza.

VII. razred: Grafički prikaz proporcionalnosti; postotak, računanje s postotcima; jednostavni kamatni račun; dijeljenje dužine; sličnost trokuta; dijagonale mnogokuta i kutovi mnogokuta; pravilni mnogokuti; opseg i površina mnogokuta; odnos središnjeg i obodnog kuta; Talesov poučak; opseg kruga; površina kruga; graf linearne funkcije, jednadžba pravca.

VIII. razred: Potencije s prirodnim eksponentom; drugi korijen; računanje s korijenima; Pitagorin poučak; iracionalni brojevi; translacija; osna simetrija; centralna simetrija; rotacija; oplošje i obujam valjka; oplošje i obujam stošca; oplošje i obujam kugle.

Izbor tema iz srednjoškolske matematike:

Površina trokuta i Heronova formula, teoremi o sličnosti trokuta, analitička formula za površinu trokuta, svojstva potencija, rastavljanje polinoma na faktore, svojstva korijena, svojstva rješenja kvadratne jednadžbe, bikvadratna jednadžba, kvadratna funkcija $f(x) = ax^2$, graf inverzne funkcije, težišnice i težište trokuta, udaljenost točke od pravca, adicijski teoremi, Newtonova binomna formula, aritmetički niz, geometrijski niz, geometrijski red, pravila deriviranja, derivacije elementarnih funkcije.

Prije obrade primjera istaknimo osnovne kvalitete primjene istraživačke nastave:

pravilan izbor izvora za proučavanje,
izdvajanje potrebnih teorijskih činjenica,
misaono prorađivanje,
postavljanje i provjeravanje hipoteza,
jezično oblikovanje i zapis rezultata rada,
rasprava i dr.

3. Primjeri

Primjeri koji slijede pokazuju djelotvornost primjene istraživačke nastave, pogotovo kad se ona kombinira s poznatim istraživačkim metodama. Neki primjeri nisu u potpunosti riješeni, već su samo navedeni osnovni koraci obrade. Potpuna razrada prepušta se nastavnicima matematike ako određenu temu odaberu za realizaciju u nastavnom procesu primjenom istraživačke nastave.

Djeljivost prirodnih brojeva s 9. Tema je pogodna za samostalni i istraživački rad učenika iz dva razloga: prije toga obrađena je tema djeljivost prirodnih brojeva s 3, pa je postupak istraživanja poznat, analogija, i lako se uspostavlja problemska situacija. Evo kako:

- Ispišite prvo sve višekratnike broja 9 manje od 200 i zbrojeve njihovih znamenki i kažite koju tvrdnju možete izreći za te zbrojeve. Zatim promatrajte nekoliko većih brojeva čiji su zbrojevi znamenki višekratnici broja 9, pa opet kažite koju tvrdnju možete izreći o polaznim brojevima.

Prvi korak: Višekratnici su brojevi 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, 189, 198, a zbrojevi njihovih znamenki su 9 ili 18. Uočava se da su zbrojevi znamenki višekratnici broja 9, tj. brojevi djeljivi s 9!

Prva tvrdnja: *Ako je prirodni broj djeljiv s 9, onda je i zbroj njegovih znamenki djeljiv s 9.*

Drugi korak: Neka su odabrani prirodni brojevi 2007, 18999, 456 237, 987 654 321 čiji su zbrojevi znamenki 9, 36, 27, 45 višekratnici broja 9. Provjera dijeljenjem pokazuje da su i promatrani brojevi djeljivi s 9.

Druga tvrdnja: *Ako je zbroj znamenki prirodnog broja djeljiv s 9, onda je i taj prirodni broj djeljiv s 9.*

Ova obratna tvrdnja omogućuje brže ispitivanje djeljivosti prirodnih brojeva s 9, nego što se to može postići dijeljenjem. To je osobito važno kod velikih brojeva. Međutim, u tom slučaju može se primijeniti džepno računalo!

Rastavljanje broja na proste faktore. U nastavi matematike osnovne škole učenici obično nauče rastavljati na proste faktore male brojeve. Pomoću džepnog računala i tablice prostih brojeva manjih od 100 (manjih od 1 000) brzo se može istražiti djeljivost prirodnih brojeva manjih od 10 000 (manjih od 1 000 000).

- Koji su od sljedećih brojeva prosti, a koji složeni: 973, 2707, 5423, 7333, 9331?

Postupak istraživanja je jednostavan: provjerava se djeljivost svakog od brojeva redom s prostim brojevima.

Prosti brojevi manji od 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Narav teme omogućuje da učenici bez teškoća sami sastavljaju nove probleme u vezi s temom i vrše dodatna istraživanja.

Zbroj kutova u trokutu. Učitelj postavlja problemsku situaciju na temelju činjenica da učenici znaju da su sva četiri kuta pravokutnika prava i da visina jednakokračnog trokuta dijeli kut uz isti vrh na dva jednaka dijela.

- Promatrajte pravokutni i jednakokračni trokut. Nađite zbrojeve kutova u tim trokutima.

Teško da bi učenici šestog razreda mogli potpuno samostalno razriješiti ovu problemsku situaciju. Zato je ipak potrebno da ih učitelj vodi.

Učitelj će vođenjem navesti učenike da u prvom koraku istražuju pravokutni trokut, nadopune ga do pravokutnika, uoče par paralelnih pravaca i njihovu presječnicu te kutove uz nju i zaključe da je zbroj kutova u pravokutnom trokutu jednak $180°$ (slika, $\alpha + \beta = 90°$, $\alpha + \beta + 90° = 180°$).

Sljedeći korak je istraživanje jednakokračnog trokuta. Visina toga trokuta dijeli ga na dva sukladna pravokutna trokuta. To znači da se može primijeniti prethodni rezultat i doći do zaključka da je i u svakom jednakokračnom trokutu zbroj kutova jednak $180°$ (slika, $\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90°$, $2\alpha + \gamma = 180°$).

Kao treći korak učenici mogu istraživati konkretne trokute.

- Nacrtajte nekoliko trokuta, pomoću kutomjera odredite njihove kutove i načinite tablicu tih kutova i njihovih zbrojeva. Opišite koji zaključak možete izvesti na temelju tablice.

Na temelju tablice zbrojeva kutova učenici mogu naslutiti da vrijedi tvrdnja: *Zbroj kutova u svakom trokutu jednak je* $180°$.

Tek sad će učenici moći s razumijevanjem pratiti dokaz tvrdnje. Pri obradi teme moguća je i uporaba računala.

Osobite točke trokuta. Važne dužine i pravci za trokut su visine, težišnice, simetrale stranica i simetrale kutova. Za te dužine i pravce vrijede jednostavne tvrdnje. Istraživanje tih tvrdnji vrlo je pogodno za obradu na računalu. Evo problemskih situacija:

- Nacrtajte bilo koji trokut i konstruirajte simetrale njegovih stranica. Istražite odnos tih pravaca.

Učenici trebaju spoznati da se simetrale stranica trokuta sijeku u jednoj točki.

- Nacrtajte bilo koji trokut i konstruirajte njegove težišnice. Istražite odnos tih dužina.

Učenici trebaju spoznati da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki.

- Nacrtajte bilo koji trokut i konstruirajte simetrale njegovih kutova. Istražite odnos tih pravaca.

Učenici trebaju spoznati da se simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki.

- Nacrtajte bilo koji trokut i konstruirajte njegove visine. Istražite odnos tih dužina.

Učenici trebaju spoznati da se pravci na kojima leže visine trokuta sijeku u jednoj točki.

Tako se malim istraživanjem otkrivaju četiri važne točke trokuta: središte opisane kružnice S, središte upisane kružnice U, težište T i ortocentar O. To su osobite ili karakteristične točke trokuta. Tvrdnje o tim točkama u nastavi obično se ne dokazuju.

- Istražite položaj točaka S, T, O.

Posljednja problemska situacija otkriva da točke S, T, O leže na jednom pravcu – Eulerov pravac. Pritom vrijedi $|TO| = 2|ST|$.

Odnos središnjeg i obodnog kuta. Svakom središnjem kutu može se pridružiti beskonačno mnogo obodnih kutova. Posebno je važan slučaj kad je tetiva nad kojom se promatraju središnji i obodni kut promjer kružnice. Obrada teme može početi upravo otkrivanjem Talesovog poučka.

- Nacrtajte kružnicu $k(S,r)$, jedan njezin promjer i bilo koju njezinu točku C. Ispitajte mjeru kuta $\sphericalangle ACB$ za razne položaje točke C na danoj kružnici (kutomjer, računalo, animacija). Opišite što ste uočili.

Učenici trebaju spoznati da vrijedi tvrdnja: *Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut (Talesov poučak).*

- Nacrtajte kružnicu $k(S,r)$, jednu njezinu tetivu $\overline{AB}$ i bilo koju njezinu točku C s iste strane tetive na kojoj je središte kružnice. Istražite mjeru kuta $\sphericalangle ACB$ za razne položaje točke C na danoj kružnici (kutomjer, računalo, animacija). Opišite što ste uočili.

Učenici trebaju otkriti sljedeći poučak o središnjem i obodnom kutu: *Obodni kut jednak je polovici pripadnog središnjeg kuta*.

Poučak je generalizacija Talesovog poučka i zato metodika predlaže obradu ove nastavne jedinice u osnovnoj školi primjenom istraživačke nastave nakon obrade Talesovog poučka. U srednjoj školi može se zadržati uobičajeni način obrade: najprije opći poučak, a onda Talesov poučak. U tom slučaju Talesov poučak dobiva se specijalizacijom. Tema je pogodna za obradu na računalu.

Pravila. Raznovrsnost matematičkog gradiva zahtijeva podrobnu analizu toga gradiva i uočavanje i izdvajanje pojedinih njegovih dijelova koji su posebno važni i koje treba pamtiti. Među takve dijelove ubrajaju se i razna pravila, posebno pravila za brojeve.

Izbor pravila:

(OŠ)

$(ab)^2 = a^2b^2,\ \sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ ,\ a^m\cdot a^n = a^{m+n},$

$(ab)^n = a^n\cdot b^n,\ |ab| = |a|\cdot|b|$ i dr.

(SŠ)

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$

$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2},\ \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\ |z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,$

$z_1z_2 = r_1r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$ i dr.

Za istraživački rad učenika ovdje postoje dvije mogućnosti. Nakon dokaza pravila najprije iz metodičkih razloga primjenom **metode analogije** treba proširiti na više od dva broja.

- Proširenje pravila. Pogledajmo, na primjer, drugo pravilo. Analogijom se ono proširuje na tri broja ovako: $(abc)^2 = [(ab)c]^2 = (ab)^2c^2 = a^2b^2c^2$. Izvedite na sličan način ostale analogone.

Daljnji korak u produbljivanju gradiva je **generalizacija** tih pravila. Poopćenja u udžbenicima najčešće nema. Međutim, nedostajanje poopćenja pruža nastavniku mogućnost da tu iskaže svoju kreativnost i vođenjem pomogne učenicima da naprave mala **otkrića**, pa možda i dokažu, poopćenja i tako pridonese razvoju njihovoga stvaralačkog mišljenja.

- Sva navedena pravila mogu se generalizirati. Primjerice, generalizacija prvog pravila glasi: *Neka je n prirodni broj veći od 1 i a_1, a_2, $\ldots$, a_n realni brojevi. Tada vrijedi jednakost* $(a_1a_2\ldots a_n)^2 = a_1^2a_2^2\ldots a_n^2$. Izvedite na sličan način generalizacije i ostalih pravila.
- Sve su generalizacije koje ste izveli istinite. Strogi dokazi provode se primjenom metode matematičke indukcije. Provedite postupak dokazivanja!

Kada se u nastavnom gradivu naiđe na neko pravilo, treba se uvijek sjetiti analogije i generalizacije!

Pitagorin poučak. Tradicionalna obrada ove teme ima jedan izraziti metodički nedostatak: počinje najčešće tako da se odmah na početku iskaže svojstvo duljina a, b i c stranica pravokutnog trokuta u obliku Pitagorina poučka $c^2 = a^2 + b^2$. Nerijetko manjka i dokaz, već se brzo prelazi na primjenu poučka na razne geometrijske likove.

Istraživanja u ovoj temi mogu se provesti u nekoliko smjerova. Za samo otkriće Pitagorina poučka dovoljna su samo dva koraka. Nakon kratkog nastavnikovog uvođenja u problemsku situaciju, svaki korak omogućuje istraživački rad učenika. Možemo još dodati da su koraci vrlo pogodni za primjenu još jedne korisne metode u nastavi matematike u osnovnoj školi – metode demonstracije (računalo).

- Izračunavanje površine kvadrata u kvadratnoj mreži. Učenici crtaju ili precrtavaju s prozirnice kvadratnu mrežu i u njoj nekoliko kvadrata različitih položaja s vrhovima u čvorištima mreže. Površine takvih kvadrata su cjelobrojne. Korak završava izradom tablice površina kvadrata.
- Pitagorine figure. Pitagorina figura sastoji se od pravokutnog trokuta i tri kvadrata nad njegovim stranicama. Sada se u kvadratnoj mreži crta niz takvih figura i na temelju prvog koraka određuju površine kvadrata i unose u tablicu. Korak završava uočavanjem veze među površinama i formulacijom poučka.

Mogući daljnji koraci:

- Istraživanje analogona pravokutnog trokuta (polovica kvadra, Pitagorin tetraedar, tetraedar omeđen pravokutnim trokutima).
- Istraživanje analogona Pitagorinog poučka.
- Otkrivanje generalizacija Pitagorinog poučka. Postoje tri pogodne zamjene kvadrata nad stranicama pravokutnog trokuta koje vode do generalizacija Pitagorinog poučka: kvadrati → slični četverokuti, kvadrati → pravilni mnogokuti, kvadrati → slični mnogokuti. Istražite te mogućnosti!

Bez velike muke učenici će doći do tri lijepe nove tvrdnje. I to istinite!

- Postoji još jedan zanimljiv smjer istraživanja u vezi Pitagorinog poučka – *Pitagorine trojke brojeva*. Naslućujete li kakve su to trojke? Pravokutni trokut čije su duljine stranica prirodni brojevi naziva se *Pitagorin trokut*. Uređena trojka prirodnih brojeva (a, b, c) koja zadovoljava *Pitagorinu jednadžbu* $x^2 + y^2 = z^2$ naziva se *Pitagorina trojka*. Jasno je da za svaku Pitagorinu trojku (a, b, c) postoji pravokutan trokut kojemu su a, b, c duljine stranica. Pritom trojke (a, b, c) i (b, a, c) geometrijski ne razlikujemo jer određuju sukladne pravokutne trokute. Istražite sve Pitagorine trokute kojima duljine stranica nisu veće od 100.

Pomoću tablice kvadrata ili rješavanjem Pitagorine jednadžbe metodom razlikovanja slučajeva učenici mogu otkriti da postoje 52 Pitagorina trokuta koji zadovoljavaju uvjet:

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10), (7, 24, 25),
(8, 15, 17), (9, 12, 15), (9, 40, 41), (10, 24, 26),
(11, 60, 61), (12, 16, 20), (12, 35, 37), (13, 84, 85),
(14, 48, 50), (15, 20, 25), (15, 36, 39), (16, 30, 34),
(16, 63, 65), (18, 24, 30), (18, 80, 82), (20, 21, 29),
(20, 48, 52), (21, 28, 35), (21, 72, 75), (24, 32, 40),
(24, 45, 51), (24, 70, 74), (25, 60, 65), (27, 36, 45),
(28, 45, 53), (28, 96, 100), (30, 40, 50), (30, 72, 78),
(32, 60, 68), (33, 44, 55), (33, 56, 65), (35, 84, 91),
(36, 48, 60), (36, 77, 85), (39, 52, 65), (39, 80, 89),
(40, 42, 58), (40, 75, 85), (42, 56, 70), (45, 60, 75),
(48, 55, 73), (48, 64, 80), (51, 68, 85), (54, 72, 90),
(57, 76, 95), (60, 63, 87), (60, 80, 100), (65, 72, 97).

Svojstva rješenja kvadratne jednadžbe. Ovdje srednjoškolci istraživačkim radom mogu doći do nekoliko otkrića. Teorijske činjenice potrebne za obradu ove teme su formule za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Svaka formula izražava jedno od rješenja kvadratne jednadžbe pomoću svih njezinih koeficijenata a, b i c. Zanimljivo je i pitanje veze oba rješenja x_1 i x_2 s nekim od koeficijenata a, b i c. Problemnost ove situacije moguće je izraziti na tri različita načina. Izbor ovisi o predznanju učenika. Najteži je onaj način u kojem nastavnik stvara situaciju u kojoj se od učenika zahtijeva da sami shvate, formuliraju i razriješe problem koji se u toj situaciji nalazi.

• Nađite vezu između rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ i njezinih koeficijenata a, b i c.

Ovdje ima više nepoznanica. Nije poznat ni smjer istraživanja, ni krajnji rezultat. Od učenika se očekuje da sami otkriju da najjednostavniji rezultat daje razmatranje zbroja $x_1 + x_2$ i umnoška x_1x_2 rješenja x_1 i x_2. S druge strane to nije teško uočiti. Konačni rezultat trebaju biti Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Postoji još jedan važan trenutak pri razmatranju kvadratne jednadžbe: zapis kvadratne jednadžbe pomoću njezinih rješenja x_1 i x_2. Problemnost ove situacije nastavnik može tako i iskazati:

- Pronađite način zapisivanja kvadratne jednadžbe kojoj su zadana rješenja x_1 i x_2.

Ovdje je nepoznat drukčiji zapis kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Od učenika se očekuje da zapis $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ otkriju primjenom Vièteovih formula.

- Sada kad znamo da su Vièteove formule za kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$ skrivene u prikazu kvadratne jednadžbe u novom obliku $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, Vièteove formule za kubnu jednadžbu $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mogu se lako izvesti primjenom metode analogije. Istražite oblik tih formula.

Najprije se analogijom postavlja zapis $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ kubne jednadžbe $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pomoću njezinih rješenja x_1, x_2 i x_3, a onda uspoređivanjem koeficijenata u dvama zapisima izvode tražene formule:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

- Slične formule mogu se lako izvesti i za algebarsku jednadžbu n-tog stupnja. Algebarska jednadžba n-tog stupnja $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ je generalizacija linearne, kvadratne i kubne jednadžbe. Najprije napišite generalizaciju zapisa jednadžbe pomoću njezinih rješenja $x_1, x_2, \ldots x_n$, a onda izvedite generalizaciju Vièteovih formula.

Jednadžba se može zapisati u obliku

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0.$$

Sada imamo dva zapisa jednadžbe n-tog stupnja. Uspoređivanjem koeficijenata u oba zapisa dobiva se tražena generalizacija:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Elipsa i hiperbola. Obrade ovih nastavnih jedinica u trećem razredu srednje škole imaju mnogo sličnosti. Definicije $r_1 + r_2 = 2a$ i $|r_1 - r_2| = 2a$ elipse i hiperbole su očito slične. Pokazuje se da se slično postavljaju koordinatni sustavi i izvode jednadžbe $b^2x^2 + a^2y = a^2b^2$, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ tih krivulja. Zato profesor matematike može primijeniti istraživačku nastavu postavljajući nakon obrade elipse sljedeću problemsku situaciju:

- Podsjetite se na obradu elipse i njezinih elemenata i oponašajući postupak te obrade istražite hiperbolu i njezine elemente.

Elementi istraživačkog rada učenika: definicija hiperbole, konstrukcija hiperbole, jednadžba hiperbole, uvjet diranja pravca i hiperbole, jednadžba tangente na hiperbolu u njezinoj točki.

Približne vrijednosti i pogreške. Često se pri izračunavanju različitih veličina pojavljuju iracionalni brojevi. Tako ćemo u mnogim geometrijskim zadacima naći brojeve π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, itd. Budući da ne možemo račune provoditi s njihovim točnim vrijednostima, konačne rezultate ili zapisujemo s ovim oznakama, ili izračunavamo s približnim vrijednostima tih brojeva zaokruženim na dvije decimale ($\pi \approx 3.14$, $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{5} \approx 2.24$, $\sqrt{6} \approx 2.45$, $\sqrt{7} \approx 2.65$, $\sqrt{8} \approx 2.83$, $\sqrt{10} \approx 3.16$ itd.). Pritom nastaju manje ili veće pogreške.

Svako džepno računalo ispisuje za iracionalne brojeve veći broj decimala, što znači da pri izračunavanjima primjena džepnog računala daje mnogo točnije rezultate. To je prilika za jedno istraživanje koje učenicima može pomoći da bolje shvate prirodu iracionalnih brojeva i pitanje aproksimacija matematičkih veličina. Na početku svakako treba uključiti procjenu kao važan korak u procesu mišljenja.

- Ako uzmemo da je Zemlja kugla polumjera $R = 6371$ km, istražite kolika je razlika njezinih površina pri računanju s brojem $\pi \approx 3.14$ i $\pi \approx 3.141592654$ (džepno računalo).

Pri izračunavanjima nestat će površina približne veličine površine nestale Jugoslavije!

Metodička napomena

Istraživačka nastava je suvremen, ali viši nastavni sustav. Ta činjenica odmah upozorava na njezinu težinu i učenicima i nastavnicima matematike. Učenicima je ona teška zato što samostalno rješavanje problema nije ni jednostavno, ni lako. Prva bitna pretpostavka za uspješnu primjenu ove nastave je da su učenici **primjereno osposobljeni za umni rad**.

Težina istraživačkog rada učenika može se ublažiti tako da se pretpostavljeni samostalni rad učenika kombinira radom u paru ili grupnim radom, a sama nastava s heurističkom i problemskom nastavom. Razred ne gubi svoju cjelovitost, a suradnja, razmjena mišljenja i ideja učenika pridonose kvaliteti nastave. Sve se to treba provoditi u **matematičkoj radionici!** I u svakodnevnom životu istraživanja najčešće provode istraživačke grupe, odnosno istraživački timovi.

Iako se poučavanje nastavnika matematike u istraživačkoj nastavi znatno smanjuje, ovaj nastavni sustav relativno je težak i za nastavnika. Uloga nastavnika u njemu sastoji se u stvaranju problemskih situacija (crne točke u članku!), savjetovanju i pomaganju učenika pri izboru izvora, ukazivanju na potrebne teorijske činjenice i završnoj raspravi o rezultatima istraživačkog rada učenika. Tu se mogu pojaviti i postavke učenika koje nastavnik nije predvidio. Na takvu situaciju on mora biti pripravan. Zato je druga bitna pretpostavka za primjenu istraživačke nastave **dobra osposobljenost nastavnika matematike**.

S istraživačkim radom treba početi vrlo rano, već od petog razreda, kako to počinje i ovaj članak.

LITERATURA

[1] V. Kadum, *Učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi matematike*, «IGSA», Pula, 2005.

[2] Z. Kurnik, *Problemska nastava*, Matematika i škola 15 (2002), 196–202.

[3] Z. Kurnik, *Heuristička nastava*, Matematika i škola 34 (2006), 148–153.

[4] Z. Kurnik, *13 matodičkih radionica*, Matkina biblioteka – Metodička radionica, HMD, Zagreb, 2007.

[5] G. Polya, *Matematičko otkriće* (prijevod s engleskog), HMD, Zagreb, 2003.