Računalo u nastavi matematike

Teorijska podloga i metodičke smjernice

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb

2. dio: Promjene u nastavi matematike

Uvod

U prošlom broju govorilo se o posebnim mogućnostima koje računalo donosi u nastavu matematike. No, uz potencijale poput mogućnosti različitih oblika prikazivanja, eksperimentalnog rada, elementariziranja i modulariteta, spomenut je još jedan aspekt: odterećenje operativnog (računskog) dijela nastave s učenika na računalo. Upravo će o tom odterećenju biti riječi u ovom članku. Ideja o prebacivanju operativnih radnji s učenika na računalo je različito prihvaćena – dok je jedni (nastavnici i metodičari) hvale, drugi su vrlo skeptični. Zato je potrebno istražiti kakve nam to promjene donosi računalo u nastavu matematike i do kojih zaključaka su došli europski metodičari istraživanjem ove teme.

Uporaba računala u nastavi pretpostavlja da postoje materijalni, tehnički i organizacijski uvjeti za primjenu računala u nastavi, te da za njihovo korištenje postoji metodički dobro osmišljen plan i promišljena teorijska pozadina. U ovom tekstu će biti riječi upravo o nekim metodičkim pitanjima vezanim uz uporabu računala u nastavi matematike.

Primjene u nastavi

Računalo može na sebe preuzeti velik dio operativnog dijela u nastavi, a oslobođeni prostor učenici mogu iskoristiti za bolje razumijevanje osnovnih ideja u matematici (osnovno znanje), kao i za diskusije, te kreativno matematičko razmišljanje (refleksno znanje). Iako se o tom odterećenju već dugo govori i dio je školske prakse kod nekih kolega, ono još uvijek ipak zvuči vrlo kontroverzno: nastavnici su podijeljeni u mišljenju treba li na ovaj način mijenjati nastavu matematike, a iskustva iz razreda pokazuju (Schneider, 1999.) da čak i oni učitelji koji koriste računalo u nastavi matematike, koriste ga na “tradicionalan” način, tj. kao pomagalo kod kojeg se nastava nije bitno izmijenila. No, zapitajmo se kako bi izgledala nastava matematike kada bi bila orijentirana na fundamentalne ideje, na refleksiju i interdisciplinarnost, a ne na algoritme i operiranja (Fischer, str. 5).

Slutimo da bi takva nastava matematike bila različita od današnje. Većina promjena proizlazi iz činjenice da se računalima mogu efikasno provesti brojni računi, operacije, postupci i algoritmi koje učenici na "tradicionalnoj nastavi" redovito računaju na papiru. Promjene u nastavi matematike možemo promatrati obzirom na njene ciljeve, sadržaj, metode te obzirom na socijalne skupine u nastavi (Peschek, 1997.; Schneider, 1999.).

Promjene obzirom na ciljeve

Ciljeve nastave matematike u Hrvatskoj možemo pronaći u Nastavnom planu i programu (koji se nalazi i na web stranicama MZOS-a). Prebacivanje mnogih algoritamskih i numeričkih operacija s učenika na računalo za sobom povlači i promjenu u definiranju nekih ciljeva nastave matematike. Bolje reći, naglasak se stavlja na ciljeve koji su dosad možda i bili spominjani, ali definitivno nisu bili u prvom planu.

Ciljevi koji dolaze u prvi plan uporabom računala u nastavi su (Schneider, 1999.):

- "*orijentacija na aplikacije, modeliranje, autentičnost i rješavanje problema;*
- *naglasak na aspekte prezentacije i interpretacije unutar matematike;*
- *koncentracija na odgovarajuću izgradnju koncepata;*
- *diskusija o mogućnostima i granicama matematičkih postupaka;*
- *orijentacija na fundamentalne matematičke ideje;*
- *interdisciplinarnost;*
- *učenje o povijesnim i socio-psihološkim aspektima;*
- *različiti socijalni ciljevi nastave matematike.*"

Nastavnici koji su skeptični prema ideji da računalo uđe u nastavu matematike i preuzme na sebe računanja su iskazali bojazni da će tako nestati dosadašnje razvijanje kvaliteta poput ustrajnosti, strpljivosti, točnosti, koncentracije, itd. No, prema Schneider (1999.) doznajemo da danas mnogi metodičari (koji pozdravljaju ideju da se učenici oslobode nekreativnih rutinskih radnji) smatraju da odlike poput ustrajnosti, strpljivosti, točnosti i koncentracije neće nestati, već će biti pomaknute na jedan drugi nivo.

Promjene obzirom na sadržaje

Uvođenjem računala uvodi se i mogućnost uvođenja novih sadržaja u nastavu matematike, kao i preispitivanje postojećih nastavnih planova. Mogućnosti eksperimentiranja i povezivanja raznih vrsta prikaza (algebarskog, tabličnog, grafičkog) otvaraju vrata novim matematičkim sadržajima, koji dosad nisu bili vizualno mogući u tradicionalnoj nastavi. Dinamika iz programa dinamične geometrije i interaktivnih alata omogućuje naglašavanje novih sadržaja i proširuje vidike iz starih. Također, prebacivanje algoritamskih i numeričkih operacija s učenika na računalo za sobom povlači i promjene u sadržajima nastave matematike.

"*Promjene sadržaja mogu također biti posljedica novih pristupa i novih naglasaka unutar tradicionalnih sadržaja, pristupa i naglasaka koji dosad nisu koristili u nastavi zbog velikih napora potrebnih za ručne izračune ili zbog teškoća u računanjima: rekurzija je primjer za to, kao i diskretizacija i elementarizacija.*" (Schneider, 1999.)

O elementarizaciji je bilo riječi u prvom dijelu članka: Zbog ograničenja u mogućnostima rješavanja složenih računa i postupaka pronalazile su se nove metode u svrhu lakših rješavanja zadataka. Mogućnosti današnjih računala daju nam opet šansu da se vratimo prvobitnim ("*elementarnim, primitivnim*", Schneider 1999.) metodama koje su se prije činile prekompliciranima, a današnja ih računala bez problema mogu svladati. Taj se postupak naziva *elementariziranje*.

Uvođenje računala u nastavu matematike učenicima omogućuje i sasvim novi pogled na rekurziju. Uostalom, većina gimnazijalaca se s rekurzijom prije susretne upravo na satu informatike i programiranja. Tako se, primjerice, eksponencijalna funkcija $f(n) = a^n$ sasvim drukčije doživljava na satu matematike kroz jednadžbu i graf, a drukčije kroz programiranje, gdje se definira kao rekurzija $f(n) = a \cdot f(n-1)$, odakle upada u oči da konstanta određuje prirast. Zgodan primjer o eksponencijalnoj funkciji kao rekurziji napravljen u *GeoGebri* nalazi se iza ovog članka u primjeru kolege Šime Šuljića.

Možemo se pitati koje to još sadržaje treba mijenjati ili proširivati u nastavi matematike, a koje ipak ostaviti. Čak i ako koristimo računalo u nastavi, može li opstati nastava matematike s računalnom potporom, ali s današnjim sadržajima? Drugim riječima, je li domet koristiti računalo u nastavi matematike samo kao sredstvo za rješavanje zahtjevnijih zadataka i konstrukcija? Za ovo pitanje potrebna su metodička istraživanja, diskusije i promišljanja.

Promjene obzirom na metode

Upravo iznesena pitanja možemo prenijeti i na metode u nastavi matematike: Može li opstati nastava matematike s računalnom potporom, ali s današnjim metodama? I na koji to način uporaba računala na satu matematike može mijenjati metode rada?

U prošlom broju dosta je prostora bilo posvećeno eksperimentiranju kao posebnom potencijalu koje nudi računalo u nastavi matematike. Upravo mogućnost eksperimentiranja širom otvara vrata eksperimentalnim i heurističkim metodama. Učenici mogu eksperimentalno istraživati razna svojstva iz matematičkog gradiva i donositi zaključke, a razni oblici prikazivanja (tablični, grafički, simbolički) te dinamika i interaktivnost će im pomoći u donošenju pravih zaključaka.

"*Stoga je ključna točka to što učenici mogu ponavljati svoja istraživanja uvijek iznova s gotovo beskonačno mnogo primjera kako bi provjerili svoje hipoteze sve dok više ne stavljaju u pitanje točnost svojih pretpostavki, a zatim ih verificiraju kao matematičke činjenice.*" (Schneider, 1999.)

Prof. Schneider također primjećuje da je u eksperimentalnoj nastavi potpomognutoj računalom ključno pitanje "Što ako?" na koje učenici odgovaraju sami pomoću eksperimenta i mijenjanjem željenih parametara. Ključno pitanje iz tradicionalne nastave matematike je 'Zašto?' i odgovor na njega učenicima više nije toliko nedostižan jer na njega mogu dobiti odgovor uz mogućnosti računala.

No, uz eksperimente uvijek treba biti i oprezan jer samostalan rad učenika treba nadgledati i voditi zbog mogućnosti donošenja krivih zaključaka, kao i stavljanja naglaska na manje bitne stvari. To nas vodi do vrlo važne i delikatne uloge nastavnika u nastavi potpomognutoj računalom, kao i važnosti dobro osmišljenog računalnog materijala (programa, apleta) za učenike. Uza sve to, u prošlom je broju bilo istaknuto kako je važno učenicima skrenuti pažnju da eksperimentom dobiveni zaključci ipak nemaju snagu pravog matematičkog dokaza.

Promjene obzirom na socijalne skupine

Uporaba računala na satu matematike mijenja i dosadašnju nastavu matematike koja je većinom orijentirana na frontalni rad. Rad s računalom često se organizira u skupinama ili u paru (između ostalog, i zbog smještaja računala u učionici, te zbog većeg broja učenika obzirom na broj računala), ali se organizira i individualno, pogotovo ako je riječ o radu s kalkulatorima.

Primjene u praksi

Iako je računalo već ušlo u matematičke učionice u Hrvatskoj (pa makar zasad i u obliku *Power Point* prezentacija), možemo se zapitati hoće li njegova uporaba na nastavi uzeti maha do te mjere da se zaista masovno crpe njegove prave mogućnosti poput raznih vrsta prikaza, dinamike ili eksperimentalnog rada (opisanih u prošlom broju), te rasterećenja nastave od rutinskog računanja. Ili će samo nekolicina nastavnika koristiti računalo na satu, a ostali će ostati (najviše) na *Power Point* prezentacijama? Ovo pitanje ostaje otvoreno jer su promjene koje donose mogućnosti računala toliko velike da izlaze iz okvira odlučivanja nastavnika za kojim će sredstvom posegnuti. Nastavnik, doduše, prilikom pripreme za sat može odlučiti koju će metodu ili socijalnu skupinu odabrati u realizaciji, ali ambiciozne promjene u *ciljevima* i *sadržaju* trebaju se realizirati na višoj razini i o njima ne odlučuje samo nastavnik. Uz to, javljaju se problemi poput potrebe opsežnih priprema za ovakav rad, loših materijalnih i organizacijskih uvjeta u našim školama, slabe metodičke podrške nastavnicima za područje primjene računala u nastavi, ali i strahova kod nastavnika (strah od velike promjene, strah od rada koji ne ostavlja vidljivog traga u bilježnici i sl.). Velike i ambiciozne promjene često je vrlo teško provesti u djelo.

No, sve navedeno nas ipak ne sprječava da ne diskutiramo i ne govorimo o posebnim mogućnostima koje ima računalo u nastavi matematike, te o promjenama koje se trebaju dogoditi ukoliko želimo iskoristiti potencijale računala u nastavi.

Zaključak

Potencijali koje donosi računalo u nastavu matematike, kao i ideja rasterećenja učenika od rutinskog operiranja, nužno dovode do promjena u ciljevima, metodama, sadržaju i socijalnoj organizaciji nastave matematike. Uz sistematizaciju promjena u nastavi, u ovom tekstu su navedeni i važniji problemi vezani uz promjene, te je postavljen niz otvorenih pitanja. Traženje odgovora na njih bi, vjerujem, moglo pomoći poboljšanju nastave matematike u Hrvatskoj, te izgradnji vlastitih stavova i konkretnih koraka za kvalitetnu primjenu računala u nastavi matematike. Potencijala među našim nastavnicima za suradnju i realizaciju sigurno ima.

U ovom članku, kao i onom iz prošlog broja *MiŠ*-a, opisani su potencijali i promjene kod uvođenja računala u nastavu matematike. No, da ne bi sve ostalo na pukom teoretiziranju, pobrinuo se kolega Šime Šuljić, koji je neke ideje iz ovog teksta pretočio u konkretne primjere u *GeoGebri.* U tekstu koji neposredno slijedi na stranicama 85-87 prikazao je nekoliko primjera upotrebe računala u nastavi matematike koji se naslanjaju na ovaj tekst i time još više obogatio ovaj članak. Njegove primjere toplo preporučam čitateljima.

LITERATURA za 2. dio

[1] R. Fischer: *Längerfristige Persperktiven des Mathematikunterrichts*, U: mathematica didactica 13, str. 38–61, 1990.

[2] R. Fischer: *Höhere Allgemeinbildung*, Sveučilišna skripta, 15 str., (neobj.).

[3] W. Peschek: *Computereinsatz im Mathematikunterricht*, U: Parisot, K. J. / Vásárhelyi, É. (ur.): Integrativer Unterricht in Mathematik. Proceedings of the 5th Conference “Didaktik der Mathematik Österreich-Ungarn”, str. 67-74. Abacus-Verlag, 1997.

[4] E. Schneider: *Changes of Teaching Mathematics by Computer Algebra Systems* (CAS), Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1997., Osnabrück, Germany, 1999.

[5] E. Schneider: C*omputeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Didaktische Orientierungen – Praktische Erfahrungen*, Profil Verlag, München-Wien, 2002.

Različiti oblici prikazivanja

Jednostavan zadatak analitičke geometrije

Zadatak. Odredite realne brojeve a, b tako da $2\,x^2 + \mathrm{a}\,y^2 + b\,x - 5\,y + 3 = 0$ bude jednadžba kružnice koja prolazi točkom $(2, 3)$.

Klasičan pristup

Ovaj se zadatak, u klasičnom načinu rješavanja, svodi na poznavanje činjenica:

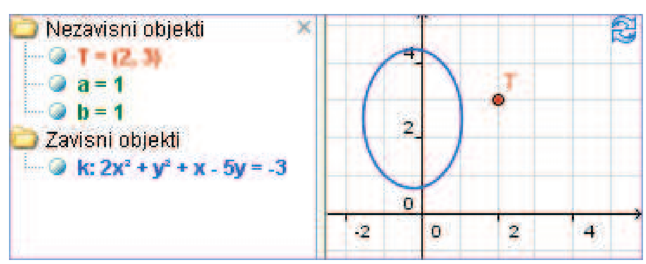
1. da koeficijenti uz kvadratne članove u jednadžbi krivulje drugog reda moraju biti jednaki, to jest da je $a = 2$.
2. da koordinate točke moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje.

U tehničkom smislu valja u zadanu jednadžbu uvrstiti $a = 2$, $x = 2$ i $y = 3$. Jednadžba se svodi na linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Postupak rješavanja nije uopće složen ali može postati rutina od koje se ne vidi bit i smisao zadatka.

Uz pomoć računala

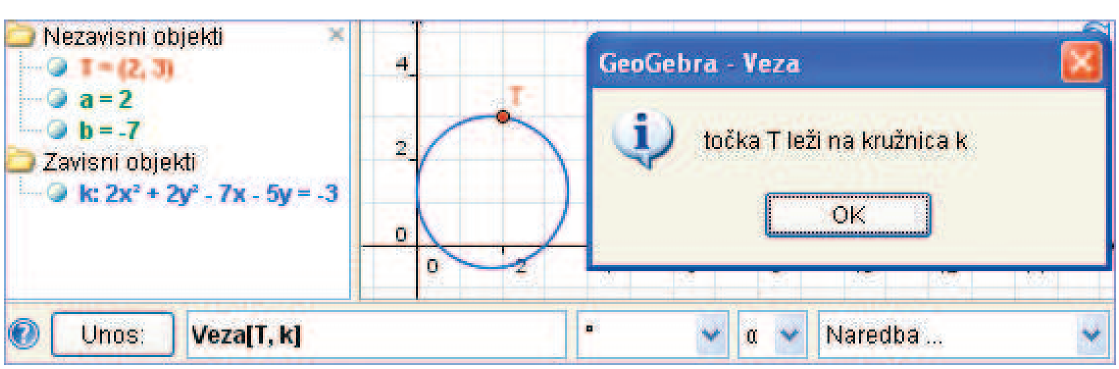
Za rješenje ovog zadatka u *GeoGebri* potrebno je u polje za unos upisati koeficijente kao parametre, jednadžbu krivulje u općem obliku i točku:

3. $a = 1$ (ili bilo koja druga proizvoljna vrijednost);
4. $b = 1$;
5. k: $2\,x^2 + a\,y^2 + b\,x - 5\,y + 3 = 0$;
6. $T = (2, 3)$.



Slika koja se dobije iznenadit će jer je odmah jasno da za ove vrijednosti parametara uopće nije riječ o kružnici!

Promjenom parametara a i b učenik eksperimentalno može doći do zaključka koji od parametara utječe na to da krivulja postane kružnica, a koji utječe na položaj i veličinu krivulje. Naposljetku, ta će kružnica i proći točkom T. Međutim, ovdje se postavlja pitanje možemo li se potpuno osloniti na grafički prikaz. Nije li riječ možda o točki koja samo prividno pripada kružnici. *GeoGebra* ima jednostavnu naredbu za provjeru. Potrebno je u polje za unos upisati Veza[T, k].

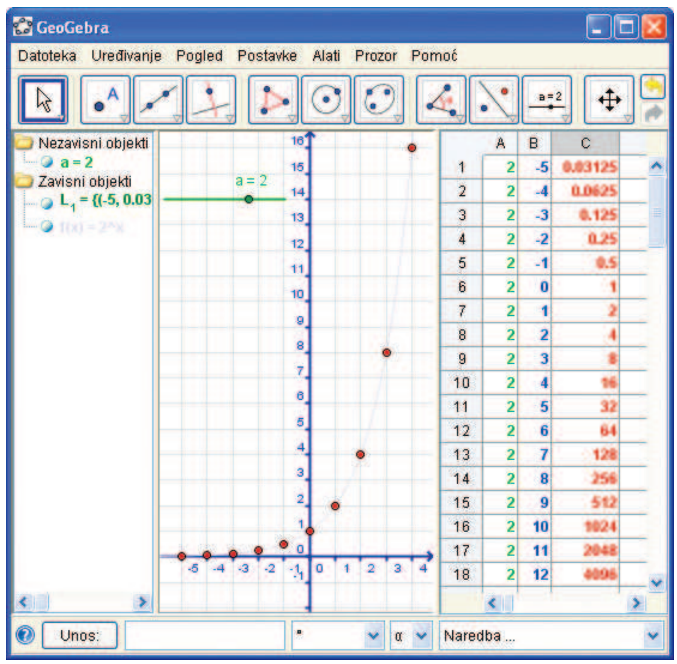


Iako može izgledati da sada olako riješeni zadatak nema smisla više rješavati, uvrštavanje poznatih parametara u jednadžbu je možda čak još intrigantnije.

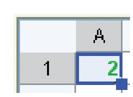
Eksponencijalna funkcija kroz rekurziju

Eksponencijalna funkcija $f(n) = a^n$ kao rekurzija $f(n) = a \cdot f(n-1)$.

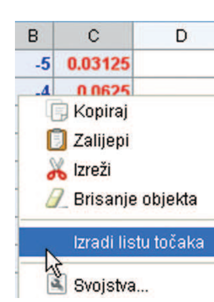
U najnovijoj inačici programa *GeoGebra*, koja ima i prozor s proračunskom tablicom nalik onoj u *Excelu* spomenuti primjer eksponencijalne funkcije može se jednostavno i vrlo efektno izraditi. Pogledajte sliku.



Opis koraka konstrukcije



1. Zadajte klizač $a = 2$ alatom iz predzadnje skupine alata.
2. Upišite u ćeliju $A1$ parametar a. Bit će prikazana vrijednost parametra a. Dok je ćelija označena, razvucite istaknuti ugao ćelije na cijeli stupac.
3. U stupac B treba unijeti vrijednosti varijable kao aritmetički niz. U prvi stupac upišite -5, u drugi -4, a zatim označite obje ćelije i razvucite preko cijelog stupca.
4. U stupac C treba unijeti vrijednosti funkcije za argumente u stupcu B. Ćeliju $C1$ definirajte kao potenciju počevši sa znakom jednakosti: $=A1$^$B1$.
5. Sada ćeliju $C2$ zadajte rekurzivno $=A2*C1$ i "razvucite" preko cijelog stupca pa ćete dobiti redom $A3*C2$, $A4*C3$, …
6. Najprije označite stupce B i C, a zatim desnim klikom na njih otvorite skočni izbornik. Odaberite naredbu Izradi listu točaka.



Dobivena tablica i lista točaka dinamične su, odnosno prate pomak klizača, pa je moguće proučavati i funkcije drukčije baze. Također, možete mijenjati i vrijednosti nezavisnih ćelija i sve zavisne pratit će te promjene prema zadanim relacijama.

Skup svih parabola

Zadatak. [Državno natjecanje 2007. godine, II. razred B kategorija]

Dan je skup parabola $y = (k - 2)x^2 - 2kx + k + 2$, pri čemu je $k \neq 2$ realan broj.

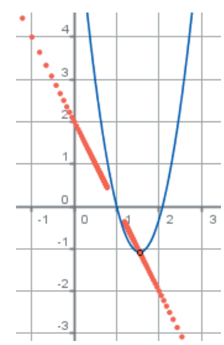
a) Dokažite da tjemena svih tih parabola leže na istom pravcu i odredite njegovu jednadžbu.

b) Imaju li sve te parabole zajedničku točku?

Određivanje tjemena parabole svodi se na poznavanje činjenice da je apscisa tjemena broj $x_0 = -\frac{b}{2a}$, a njena ordinata $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. U ovom slučaju će koordinate tjemena naravno ovisiti o parametru k:

$$x_0 = \frac{k}{k-2},\quad y_0 = \frac{4}{2-k}.$$

Promjenom vrijednosti parametra dobije se skup tjemena. Eliminacijom parametra k može se vrijednost ordinate prikazati u zavisnosti od apscise. Ta funkcijska ovisnost bit će linearna, odnosno dobit ćemo jednadžbu pravca. Rekli bismo prilično jednostavno, zar ne? Međutim tomu zapravo nije tako i bez dubokog razmišljanja sve se lako može pretvoriti u neki automatizirani postupak bez trunka matematičke ljepote.



Upotrijebimo li računalo, tvrdnju ovog zadatka moguće je predočiti do razine opipljivosti na vrlo jednostavan i brz način kroz tri naredbe. U polje za unos zadamo tri naredbe:

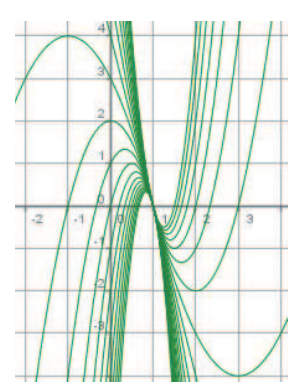
1. `k = 1`
2. `f(x) = (k - 2)x² - 2kx + k + 2`
3. `T = Ekstrem[f]`

Sada je potrebno samo uključiti ostavljanje traga za točku T i mijenjati parametar k. Trag koji će ostaviti tjeme parabole je pravac čija se jednadžba može prepoznati. Naravno, tu preostaje zadatak izvesti do kraja, odnosno matematičkim postupkom dokazati tvrdnju.

Rješenje drugog dijela ovog zadatka vidljivo je čim se uključi ostavljanje traga parabole. Zajednička točka (1, 0) odmah će biti uočljiva. S *GeoGebrom* to je moguće izvesti i na drukčiji način. Za to upotrijebimo naredbu: `Niz[izraz, varijabla, od, do, korak]`. U konkretnom slučaju izraz je jednadžba parabole, a varijabla k:

```
Niz[(k - 2) x² - 2 k x + k + 2, k, -10, 10, 1].
```

Tako ćete dobiti listu parabola naziva *list1*. Elemente liste program ne osjeća kao geometrijske ili algebarske objekte. Želite li da ih u tom smislu prepozna, potrebno je izdvojiti ih naredbom `Element`. Isprobajte:



1. `A = Ekstrem[Element[list1,1]]`
2. `B = Ekstrem[Element[list1,5]]`
3. `C = Ekstrem[Element[list1,10]], ....`
4. `Pravac[A, B]`
5. `Veza[C, a]`
6. `Sjecište[Element[list1,5],Element[list1,10]]`, ovdje brojevi 5 i 10 znače dva proizvoljna elementa liste, odnosno dvije parabole. Možete isprobati i neke druge.

Ovo isprobavanje u *GeoGebri* može biti toliko zanimljivo da zaboravimo na matematiku, a drugi dio ovog zadatka ipak bi trebalo riješiti matematički. Dakle, za neki $k_1 \neq k_2$ trebalo bi riješiti sustav:

$$y = (k_1 - 2)x^2 - 2k_1x + k_1 + 2,$$

$$y = (k_2 - 2)x^2 - 2k_2x + k_2 + 2.$$

Eliminacijom nepoznanice y dolazimo do jednadžbe čije je jedino rješenje $x = 1$. Uvrštenjem u jednu od jednadžbi dobivamo $y = 0$, odnosno točku $(1, 0)$.

Šime Šuljić, Pazin