Tik-tak, tik-tak, ...

Branimir Dakić, Zagreb

Tik-tak, tik-tak... Koliko je sati? Koliko sati pokazuje stara ura sa Zagrebačke katedrale što je vidimo i na naslovnici MiŠ-a?

Bilo bi to 10 h 15 min.

Koliki kut zatvaraju velika i mala kazaljka ure u tom trenutku?

Mala kazaljka puni krug opiše za 12 sati, odnosno za jednu minutu ona opiše kut od 0.5°. Velika pak kazaljka kut od 360° opiše za 60 minuta. Za jednu minutu ta kazaljka opiše 6°. Nije sada teško izračunati kako je kut između dviju kazaljki jednak 217°30', uzmemo li pritom da kut mjerimo od velike prema maloj kazaljci. Ako bismo pod kutom između dviju kazaljki smatrali pozitivan kut, valjalo bi onda oduzeti 360° – 217°30' i dobili bismo 142°30'.

U osnovnoj školi upravo su ovakvi zadaci česti pri obradi mjerenja kuta. Usprkos tome što danas možda čak i prevladavaju digitalne ure. Ima, naravno, i drugih zanimljivih zadataka s urama, ali čini se kako su upravo ovi koji povezuju dvije mjere, mjeru vremena i mjeru kuta, najpopularniji. Analogna ura ima dvije kazaljke, veliku (satnu) i malu (minutnu), a ponekad se u zadatke uključuje i treća, sekundna kazaljka. Sekundna kazaljka za jednu minutu opiše puni kut. Uobičajeni zadatci zahtijevaju naći kut između dviju kazaljki, velike i male, u nekom trenutku. A to može biti više ili manje složen zadatak. Manje su složeni primjerice ovi zadatci:

- Koliki kut zatvaraju kazaljke ure u 4 sata?
- Koliki kut zatvaraju kazaljke ure u 9 h 45'?
- Koliki kut zatvaraju kazaljke u 1 h 35'?

Za izračunavanje kuta između dviju kazaljki u bilo kojem trenutku možemo dosta jednostavno doći do opće formule.

Neka je u promatranom trenutku h sati i m minuta. Velika kazaljka opisala je tada, računajući od 0 (ili 12) sati, kut $\alpha = 30 \cdot h + \frac{1}{2}\, m$, a mala kut $\beta = 6\, m$. Kut φ između dviju kazaljki je jednak $|\alpha - \beta| = |30 \cdot h + \frac{1}{2}\, m - 6\, m| = |30 \cdot h - \frac{11}{2} m|$.

$$\varphi = |30 \cdot h - \frac{11}{2}\, m|.$$

Tako će u točno 4 sata ($h = 4$, $m = 0$) kazaljke ure zatvarati kut $\varphi = |30 \cdot 4 - 5.5 \cdot 0|^\circ = 120^\circ$, a u 9 h 45' ($h = 9$, $m = 45$) kut će biti

$$\varphi = |30 \cdot 9 - 5.5 \cdot 45|^\circ = 22.5^\circ.$$

U trećem zadatku imamo $h = 1$, $m = 35$ pa je

$$\varphi = |30 \cdot 1 - 5.5 \cdot 35|^\circ = 162.5^\circ.$$

Ako pak računamo kut između kazaljki naše ure s početka priče, onda je

$$\varphi = |30 \cdot 10 - 5.5 \cdot 15| = |300 - 82.5| = 217.5^\circ.$$

Kut između dviju kazaljki, male i velike možemo izračunati u nekom trenutku i formulom

$$\varphi = \cos^{-1} (\cos 5.5\, x),$$

gdje je x broj minuta iza 0, odnosno 12 sati, a rezultat je, zbog definicije funkcije $\cos^{-1}$ uvijek kut φ, $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$. Tako će dvije kazaljke u 4 sata zatvarati kut $\varphi = \cos^{-1} (\cos 5.5 \cdot 240') = \cos^{-1} (\cos 1320') = \cos^{-1} (-0.5) = 120^\circ$.

A kut između velike i male kazaljke u 9 h 45 min iznosit će

$$\varphi = \cos^{-1}(\cos 5.5 \cdot 585') = \cos^{-1}(\cos 3217.5) = 22.5°.$$

I za treći primjer bilo bi: U minutama iskazano vrijeme (iza podne) jednako je 95 min. Tada je

$$\varphi = \cos^{-1}(\cos 5.5 \cdot 95) = \cos^{-1}(\cos 522.5) = \cos^{-1}(-0.95372) = 162.5°.$$

Posebice su zanimljivi zadatci u kojima se traži vrijeme kada su dvije kazaljke u nekom posebnom položaju.

- Koliko se puta dnevno poklope velika i mala kazaljka?
- Koliko puta dnevno mala i velika kazaljka zatvaraju pravi kut?
- U koje vrijeme između 5 i 6 sati kazaljke čine ispruženi kut?
- U koje će vrijeme između 6.30 i 7 sati kazaljke zatvarati pravi kut?

Razmotrimo potanko takav jedan zadatak:

Zadatak. U 12 sati velika i mala kazaljka ure točno se poklapaju. Nakon koliko će se vremena one ponovo poklopiti?

Nakon sat vremena velika kazaljka obiđe puni krug $(360°)$, a mala $\frac{1}{12}$ kruga $(30°)$. A nakon još $1+\frac{1}{12}$ sata velika se kazaljka nađe u poziciji u kojoj je bila mala na kraju prvog sata. Pritom je mala kazaljka prešla još $\frac{1}{12^2}$ punog kruga. Kad velika prijeđe taj isti put, mala se pomakne za $\frac{1}{12^3}$. Nastavljajući razmatranje na analogan način možemo zaključiti kako će velika kazaljka doseći malu nakon

$$1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{12^5}+\ldots$$

Ovo je primjer beskonačnog konvergentnog geometrijskog reda čiji je zbroj jednak $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{12}{11}$. Dakle, velika kazaljka prvi će puta nakon 12 sati doseći malu nakon $\frac{12}{11}$ sata.

Rješenje se može dobiti i dosjetkom. Označimo li

$$S=1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{12^5}+\ldots,$$

tada možemo pisati

$$S=1+\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{12^5}+\ldots\right) = 1+\frac{1}{12}S,$$

a odatle slijedi $S=\frac{12}{11}$.

Lijepo rješenje moglo bi se dobiti i primjenom vektora. Dvije kazaljke su dva vektora koji su (u trenutku poklapanja) kolinearni i iste orijentacije. Pokušajte!

Neki su se zaljubljenici u računala pozabavili problemima o kojima je riječ. Tako su primjerice došli do sljedećih rezultata:

1) Velika i mala kazaljka poklope se svakih 43 200/11 sekundi, što je približno 1 h 5 min 27 s. To se dogodi 11 puta u svakih 12 sati. Evo tih vremena:

12:00:00.000	01:05:27.273	02:10:54.545
03:16:21.818	04:21:49.091	05:27:16.364
06:32:43.636	07:38:10.909	08:43:38.182
09:49:05.455	10:54:32.727	

2) Između dvaju poklapanja velika i mala kazaljka čine ispruženi kut. To se dogodi u sljedećim vremenima.

12:32:43.636	01:38:10.909	02:43:38.182
03:49:05.455	04:54:32.727	06:00:00.000
07:05:27.273	08:10:54.545	09:16:21.818
10:21:49.091	11:27:16.364	

3) Satna i sekundna kazaljka poklope se svakih 43 200/719 ≈ 60.083 sekunda, odnosno 719 puta tijekom 12 sati. Evo nekoliko početnih i nekoliko završnih vremena:

12:00:00.000	12:01:00.083	12:02:00.167
12:03:00.250	12:04:00.334	12:05:00.417
12:06:00.501	12:07:00.584	
……………………………….		
11:53:59.499	11:54:59.583	11:55:59.666
11:56:59.750	11:57:59.833	11:58:59.917

4) Minutna i sekundna kazaljka poklope se svakih 3600/59 ≈ 61 sekunda a to se tijekom 12 sati dogodi 708 puta.

5) Satna kazaljka je na simetrali kuta što ga tvore minutna i sekundna kazaljka svakih 43 200/730 ≈ 59 sekunda a to se tijekom 12 sati dogodi 730 puta.