Formule

Zdravko Kurnik, Zagreb

Formula je svaki simbolički zapis, algebarski izraz ili jednakost, koji sadržava neku matematičku tvrdnju ili činjenicu.

U školskoj matematici izvodi se i primjenjuje velik broj različitih formula. Neke od njih su jednostavne, a neke su prilično složene i pamćenje takvih formula za učenike je napor i opterećenje. Formule najčešće sadržavaju nekoliko veličina. Posebnu skupinu čine one formule u kojima se jedna veličina izražava pomoću svih ostalih veličina. Takve su primjerice formule kojima se izračunavaju veličine geometrijskih objekata (opseg, visina, površina, oplošje, obujam i dr.). Evo niza dobro poznatih formula školske matematike:

$$F = 2n, \quad F = 2n - 1, \quad P = a \cdot a, \quad O = 4a,$$
$$P = a \cdot b, \quad O = 2a + 2b, \quad P = \frac{a \cdot b}{2},$$
$$O = a + b + c, \quad P = \frac{a \cdot v_a}{2}, \quad P = \frac{a + c}{2} \cdot v,$$
$$P = r^2\pi, \quad O = 2r\pi, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$c^2 = a^2 + b^2, \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad s = \frac{a + b + c}{2},$$
$$V = a^3, \quad O = 6a^2, \quad V = abc,$$
$$O = 2(ab + ac + bc), \quad V = \frac{1}{3}r^2\pi v,$$
$$O = r\pi(r + s), \quad P = \frac{4}{3}r^3\pi,$$
$$O = 4r^2\pi, \quad P = \sqrt{s(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}\,.$$

U članku [1] postavljen je problem transformacije formula. Pritom se pod transformacijom neke formule misli na nalaženje formule za izračunavanje neke druge veličine iz polazne formule pomoću svih ostalih veličina, a ne samo one koja je na početku odabrana kao nepoznata. Osnovna pitanja su bila: kada početi? i kako?

U nastavi matematike često se pretpostavlja da učenici nešto znaju ili "moraju znati", pa se to i ne poučava. To nije dobro. Nije dobro ni, kao u slučaju formula, poučavati transformaciju različitih formula nekoliko uzastopnih nastavnih sati, jer takav postupak rada s formulama nije povezan s neposrednom obradom nekog matematičkog sadržaja, već je zamoran i sam sebi svrha. Učenici teško prihvaćaju rad koji nije motiviran, kojemu ne vide neposrednu svrhu.

Metodika nastave matematike daje jednostavan odgovor na postavljena pitanja. Sažet ćemo ga u nekoliko točaka:

- Nakon izvođenja neke formule treba **odmah** ispitati sve mogućnosti njezine transformacije, uzimajući u obzir uzrast i predznanje učenika. Transformacije potkrijepiti primjerenim motivirajućim primjerima i zadacima.

- Ukazati učenicima na slučajeve kad se formula ne može neposredno primijeniti.
- Razmotriti što formula daje primjenom specijalizacije pojedinih veličina.
- Učenike nižih razreda treba **postupno** poučavati da formule promatraju šire i dublje.

Ilustrirajmo postupak transformacije formula na nekoliko odabranih primjera.

Primjer 1. Opseg trokuta. Ako su zadane duljine stranica trokuta a, b i c, njegov opseg O izračunava se pomoću formule $O = a + b + c$.

Formula razrješava slučaj a, b, c (zadano) $\to$ O (traženo). Opseg trokuta izračunava se zbrajanjem duljina stranica trokuta.

Koje su još mogućnosti? Lako se uviđa da formula razrješava i sljedeće slučajeve:

O, a, b (zadano) $\to$ c (traženo),

O, a, c (zadano) $\to$ b (traženo),

O, b, c (zadano) $\to$ a (traženo).

Za rješavanje tih slučajeva koriste se transformirane formule $c = O - a - b$, $b = O - a - c$, $a = O - b - c$, dobivene zamjenom operacije zbrajanja operacijom oduzimanja.

Primjer 2. Površina kvadrata. Ako je zadana duljina stranice kvadrata a, njegova površina P izračunava se pomoću formule $P = a \cdot a$.

Formula razrješava slučaj a (zadano) $\to$ P (traženo). Izračunavanje površine izvodi se jednostavnim množenjem. I ovu formulu poznaju već učenici nižih razreda osnovne škole.

Može li se o formuli još nešto reći? Kako se rješava slučaj P (zadano) $\to$ a (traženo), tj. kako se izračunava duljina stranice kvadrata a ako je zadana njegova površina P? Matematičar bi odmah odgovorio: slučaj se rješava pomoću transformirane formule $a = \sqrt{P}$!

Odgovor bi zadovoljavao, kad pri prvom susretu s problemom površine kvadrata ne bi bila riječ o učenicima nižeg uzrasta. U tom trenutku oni znaju samo prirodne brojeve (i razlomke), a korijeni i korjenovanje za njih su još daleko! Međutim, u tom trenutku i duljina stranice a i površina P smiju se zadati samo iz tih skupova, pa se za rješenje obrnutog problema ne može odabrati transformacija polazne formule $P = a \cdot a$ u formulu $a = \sqrt{P}$.

Problem se rješava pomoću učenicima poznatog postupka, rastavljanja brojeva na proste faktore. Razjasnimo to na jednom konkretnom primjeru.

Neka je zadana površina kvadrata $P = 245025$. Rastav na proste faktore: $P = 5 \cdot 49005 = 5 \cdot 5 \cdot 9801 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3267 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1089 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 363 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 121 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11$. Vidimo da se veličina P može napisati u obliku umnoška jednakih faktora $P = (3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)$. Lako zaključujemo da je duljina stranice toga kvadrata $a = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 495$.

Slično se postupa i kad je površina razlomak, samo se u tom slučaju na proste faktore rastavljaju i brojnik i nazivnik. Primjerice, neka je zadana površina kvadrata $P = \frac{49}{36}$. Rastav: $P = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \left(\frac{7}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{6}\right)$. Duljina stranice kvadrata je $a = \frac{7}{6}$.

Primjer 3. Površina pravokutnika. Ako su a i b duljine stranica pravokutnika, njegova površina P izražava se formulom $P = a \cdot b$.

Formula razrješava slučaj a, b (zadano) $\to$ P (traženo). Izračunavanje površine izvodi se opet jednostavnim množenjem.

Međutim, sada ni obrnuti postupak nije težak. Ako je zadana površina P pravokutnika i duljina jedne njegove stranice, recimo a, duljina njegove druge stranice b izračunava se dijeljenjem: $b = P : a$.

Ovaj primjer je općenitiji od prethodnog, a ipak u oba smjera rješava se bez teškoća!

Budući da je kvadrat pravokutnik, formula $P = a \cdot a$ za površinu kvadrata može se dobiti iz formule $P = a \cdot b$ za površinu pravokutnika specijalizacijom $b = a$.

Primjer 4. Površina trapeza. Ako su a i c duljine osnovica trapeza i v duljina njegove visine, njegova površina P izražava se formulom $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$.

U formuli imamo četiri veličine. Ako zadamo tri veličine, četvrtu možemo izračunati. Postoje četiri mogućnosti izbora veličina.

Formula neposredno razrješava standardni slučaj a, c, v (zadano) $\to P$ (traženo). Ostala tri slučaja su:

$$P, c, v \text{ (zadano)} \to a \text{ (traženo)}, \frac{2P - cv}{v};$$

$$P, a, v \text{ (zadano)} \to c \text{ (traženo)}, c = \frac{2P - av}{v};$$

$$P, a, c \text{ (zadano)} \to v \text{ (traženo)}, v = \frac{2P}{a+c}.$$

Nalaženje transformacijskih formula ne bi smjelo biti problem, jer za tu svrhu potrebno je samo znanje rješavanja linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom. A taj postupak učenici su usvojili ranije. I ne samo to. Nalaženjem transformacijskih formula oni taj postupak obnavljaju i utvrđuju.

Budući da je paralelogram vrsta trapeza, formula $P = a \cdot v$ za površinu paralelograma može se dobiti iz formule $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$ za površinu trapeza specijalizacijom $c = a$.

Primjer 5. Broj dijagonala mnogokuta. Ako je M mnogokut s n vrhova, broj D_n svih njegovih dijagonala izračunava se po formuli $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Formula neposredno razrješava slučaj n (zadano) $\to D_n$ (traženo).

Pogledajmo sada obrnuti slučaj D_n (zadano) $\to$ n (traženo). Odmah je jasno da za zadani prirodni broj D_n neće uvijek postojati mnogokut kojemu je taj broj broj dijagonala. To pokazuje već početni dio rastućeg niza broja dijagonala mnogokuta: 2, 5, 9, 14, 20, 27, … . Ako pak postoji, na što se svodi određivanje broja vrhova n tog mnogokuta?

Primjerice, pokušajmo odgovoriti na pitanje: postoji li mnogokut kojemu je broj svih dijagonala jednak 2015027? Polazni korak je jasan: treba u gornju formulu umjesto D_n staviti zadani broj i srediti jednadžbu za nepoznanicu n. Dobivamo jednadžbu:

$$n^2 - 3n - 4030054 = 0.$$

Prema tome, obrnuti problem ovdje se rješava pomoću kvadratne jednadžbe, a transformacijske formule su formule za rješenja kvadratne jednadžbe. Naravno, u osnovnoj školi taj postupak ne dolazi u obzir.

Pogledajmo kako se do odgovora na gornje pitanje može doći na drugi način. Transformacijsku formulu ostavit ćemo u obliku umnoška, a broj 4030054 rastavit ćemo na proste faktore:

$$n(n-3) = 4030054;$$

$$n(n-3) = 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 59.$$

Još preostaje da se desna strana pokuša napisati u obliku umnoška dvaju prirodnih brojeva koji se razlikuju za 3. Malim kombiniranjem nalazimo:

$$n(n-3) = (7 \cdot 7 \cdot 41)(2 \cdot 17 \cdot 59) = 2009 \cdot 2006.$$

Mnogokut s 2015027 dijagonala postoji. To je 2009-erokut!

Primjer 6. Pitagorin poučak. Ako su a, b i c duljine stranica pravokutnog trokuta ABC s pravim kutom nasuprot vrhu C, tada vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2$.

Postoje tri mogućnosti izbora veličina:

$$a, b \text{ (zadano)} \to c \text{ (traženo)}, c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$c, b \text{ (zadano)} \to a \text{ (traženo)}, a = \sqrt{c^2 - b^2};$$

$$c, a \text{ (zadano)} \to b \text{ (traženo)}, b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Rješavajući motivacijske zadatke učenici bi trebali bez poteškoća usvojiti ove transformacijske formule.

I ovdje je moguća jedna specijalizacija. Ako je $b = a$, tada pravokutni trokut možemo prepoznati kao polovicu kvadrata, a c je tada duljina njegove dijagonale. Stavimo li $b = a$ u prvu transformacijsku formulu, dobivamo poznatu formulu kojom se izražava ta duljina: $c = a\sqrt{2}$.

Primjer 7. Polinom $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$.

Oblik polinoma je naizgled dobar, ali se već pri traženju njegovih nula pokazuje da nije najprikladniji. Sretna je okolnost da se taj oblik može dosta lako transformirati na oblik koji je mnogo pogodniji za ispitivanje svojstava polinoma. Pomoću konkretnih vrijednosti argumenta x iz skupa prirodnih brojeva brzo se otkriva da je desna strana uvijek kvadrat. Pogodniji oblik polinoma, što se može opravdati kvadriranjem, izgleda ovako:

$$P(x) = = (x^2 + 3x + 1)^2.$$

Posebno u skupu prirodnih brojeva vrijedi identitet:

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2+3n+1)^2.$$

Ovaj identitet korisno je pamtiti.

Primjer 8. Heronova formula.

Ako su zadane duljine stranica trokuta a, b i c, njegova površina P izračunava se pomoću Heronove formule:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s = \frac{a+b+c}{2}.$$

U vezi s njom razmotrit ćemo dva pitanja.

1) Heronova formula ima određeni stupanj složenosti. Nije uvijek prikladna za neposrednu primjenu. Posebno se to odnosi na slučaj kad su duljine stranica trokuta iracionalni brojevi. Primjerice, ako je $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{11}$, $c = \sqrt{17}$, tada je teže izračunati vrijednost površine. Zato treba Heronovu formulu transformirati na prikladniji oblik. Ovako:

$$P = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2a-b)^2\right)}{16}}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)\,(2ab-a^2-b^2+c^2)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{4\,a^2\,b^2-(c^2-a^2-b^2)^2}.$$

Primjenom ovog preinačenog oblika Heronove formule lako se dobiva da je površina gore navedenog trokuta $P = \frac{\sqrt{219}}{4}$.

2) Preinačena formula pogodna je za davanje odgovora i na drugo pitanje. Ona se često ne dokazuje, pa u tim slučajevima bez dodatnih objašnjenja gubi na uvjerljivosti. Međutim, i tomu se može doskočiti. Budući da formula vrijedi za svaki trokut, mora vrijediti i za specijalne trokute. Učenici dobro poznaju tri specijalna trokuta: jednakostranični trokut, jednakokračni trokut i pravokutni trokut.

Lako se uvjeriti da za $c = b = a$ iz preinačene formule dobivamo $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (površina jednakostraničnog trokuta), za $c = b$ slijedi $P = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$ (površina jednakokračnog trokuta), a Pitagorina relacija $c^2 = a^2 + b^2$ daje $P = \frac{ab}{2}$ (površina pravokutnog trokuta).

Ovim specijalizacijama postiže se dovoljna uvjerljivost valjanosti polazne formule.

* * *

ZAKLJUČAK. Formule su važan matematički sadržaj. Potreban je primjeren pristup kako izvođenju neke formule, tako i njezinoj primjeni. Primjerena obrada formula u osnovnoškolskoj matematici temelj je za kasniju obradu sve složenijih formula i njihovih transformacija u srednjoškolskoj matematici. Zato je u ovom članku težište na izboru onih formula koje se u nastavi matematike pojavljuju vrlo rano. Naravno, učenici nižih razreda imaju poteškoća s izvođenjem, razumijevanjem i primjenom formula, ali načelo je jasno: ako je u nekom trenutku potrebna obrada neke formule, onda ta obrada u tom trenutku treba po mogućnosti biti sveobuhvatna. Prema tome, to načelo odgovara na pitanje kada treba vršiti transformacije formula.

Zadatak nastavnika matematike, posebno učitelja matematike, jest da svojim poučavanjem i uvažavanjem načela primjerenosti omogući učenicima što lakše razumijevanje obrade formula. Primjerena obrada znači i trajnije znanje.

LITERATURA

[1] Antonija Horvatek, *Transformacija formula*, Matematika i škola 48 (2009.), 123-125.

[2] Z. Kurnik, *Specijalizacija*, Matematika i škola 27 (2004.), 52-58.

[3] Z. Kurnik, *Načelo primjerenosti*, Matematika i škola 48 (2009.), 100-105.