Problem dijeljenja nulom

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb

Uvod

Gradivo matematike petog razreda osnovne škole najvećim dijelom odnosi se na ponavljanje gradiva aritmetike i geometrije iz prva četiri razreda, uz nadopunu novim pojmovima i postupcima. Učenici u peti razred dolaze iz razredne nastave sa solidnim znanjem računskih operacija, ali se kod svake generacije petih razreda uvijek primijeti isti fenomen: pogreške koje se odnose na rezultat dijeljenja nulom. Stoga je važno sustavno se pozabaviti ovim problemom, kako u metodičkoj i matematičkoj izobrazbi studenata učiteljskih studija, tako i u sklopu stručnog usavršavanja učitelja.

Svaka metodička interpretacija matematičkog gradiva u nastavi zahtijeva ispunjenje matematičkih i psiholoških zahtjeva. Ispunjenje matematičkih zahtjeva odnosi se na znanstveno ispravno tumačenje matematičkog gradiva. Problem nastaje kada se učenike nauči *netočnim* činjenicama, poput “$5 : 0 = 0$” ili “Ako neki broj dijeliš s nulom, to je nula” i sl. Učenicima, a i mnogim učiteljima/učiteljicama čini se da su ovi odgovori sami po sebi jasni, pa stoga i točni, no to ipak nije tako. Ovim netočnim tvrdnjama narušava se ispunjenje matematičkih zahtjeva u nastavi, a zbog činjenice da se matematičko gradivo uvijek nadovezuje na ono prije naučeno, šteta počinjena učenjem netočnih tvrdnji u ranom učenju tim je veća.

U ovom članku govori se o razlozima zašto kažemo da se nulom ne dijeli te o primjerima kako izbjeći netočnosti na satima početne nastave matematike prilikom obrade i vježbanja ove teme.

O broju nula

Potreba za nulom stara je vjerojatno koliko i računanje samo. No, zbog svoje specifičnosti da označava apstraktnu veličinu opisanu kao “ništa, nikoliko”, u mnogim starim civilizacijama ona nije imala svoj simbol, a neke civilizacije je nisu ni poznavale.

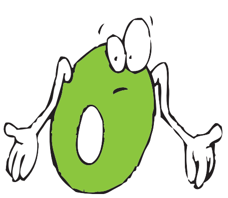
Staroindijski brojevni sustav (3. – 12. st.) poznavao je nulu u sva tri svoja oblika: kao oznaku za količinu, kao operand i kao oznaku za prazno mjesto u zapisu broja (Guedj, 1996.). U početku je ona zaista bila prikazivana kao prazno mjesto, a kasnije kao deblja točka koja se s vremenom razvila u kružić. Ideja nule vjerojatno je jedno od najvažnijih otkrića u matematici koje je utjecalo na izgradnju pravila računanja u dekadskom brojevnom sustavu te na prihvaćanje indijskog brojevnog sustava (kroz arapske brojeve) u cijelom svijetu.

Nula kao oznaka za prazno mjesto pojavila se u Indiji već oko 200. godine prije Krista, a nulu kao broj nalazimo kod indijskog mudraca Bakšalija u 3. stoljeću, i to kao rezultat oduzimanja $a - a$. On također spominje pravila računanja nulom:

$$a + 0 = a,\ a - 0 = a,\ \sqrt{0} = 0,\ a \cdot 0 = 0 \text{ te } \frac{0}{a} = 0.$$

Kasnije, u 12. stoljeću, indijski matematičar Bhaskara spominje da se nulom *ne može dijeliti* u aritmetici, ali dopušta dijeljenje nulom u algebri. Pritom veličini $\frac{a}{0}$ daje posebno ime i s njom postupa slično kako se danas koristi simbol za beskonačnost ∞ (Gusić, 1995.).

Preuzimanjem indijskoga brojevnog sustava, Arapi su preuzeli i nulu kao znamenku, oznaku za količinu i kao broj. Europljani su od 12. st. proučavali arapske tekstove, prevodili ih i preuzimali arapski (tj. indijski) brojevni sustav koji je bio mnogo praktičniji za zapisivanje i računanje od tadašnjih rimskih brojeva koji su se koristili u Europi. Osim toga, arapske brojke imale su nulu, koja je također bila potrebna u matematici, te su na kraju u Europi arapske brojke istisnule rimske.



Množenje i dijeljenje nulom u Nastavnom planu i programu

Prema važećem Nastavnom planu i programu iz 2006. godine (MZOS, 2006.) broj nula se uvodi u početnu nastavu matematike u prvom razredu osnovne škole odmah nakon usvajanja prvih pet prirodnih brojeva. Prilikom učenja prvih pet prirodnih brojeva usvojio se koncept količine tih brojeva, pravilno pisanje i čitanje brojeva do 5, njihovi međusobni odnosi te zbrajanje i oduzimanje brojeva do 5. U takav kontekst se ulazi s brojem nula. Kasnije se stečeno znanje proširuje na brojeve do 10, zatim do 20 i više.

Množenje i dijeljenje uvode se u drugom razredu osnovne škole. U Nastavnom planu i programu drugog razreda iz matematike pod brojevima 22 i 23 stoje teme “Množenje brojevima 1 i 0” te “Brojevi 1 i 0 u dijeljenju” (MZOS, 2006).

22. Množenje brojevima 1 i 0

Ključni pojmovi: množenje brojevima 1 i 0.

Obrazovna postignuća: razumjeti da je umnožak zadanog broja i broja 1 jednak zadanomu broju; razumjeti da je umnožak bilo kojeg broja 1 i 0 jednak 0.

23. Brojevi 1 i 0 u dijeljenju

Ključni pojmovi: brojevi 1 i 0 u dijeljenju.

Obrazovna postignuća: razumjeti da je rezultat dijeljenja bilo kojega broja brojem 1 jednak tomu broju; razumjeti da 0 podijeljenja brojem različitim od 0 daje 0 i da se 0 ne dijeli.

Ovdje očito počinju naši problemi, jer već u samom službenom dokumentu u obje teme stoje pogreške u tekstu. U temi 22 koja se odnosi na množenje nulom piše: *“razumjeti da je umnožak bilo kojega broja 1 i 0 jednak 0“*. U ovoj rečenici očito je suvišan broj “1”. Nadalje, u temi 23 koja se odnosi na nulu i dijeljenje piše *“razumjeti da 0 podijeljena brojem različitim od 0 daje 0 i da se 0 ne dijeli”*. Ovdje je “nula” četiri puta napisana simbolom, a sva četiri puta simbol “0” nalazi se u drugom padežu (nominativ, genitiv, akuzativ, instrumental) i ima drukčiji nastavak, pa se vrlo lako može doći do krivog zaključka. Naime, u zadnjem dijelu rečenice dio “i da se 0 ne dijeli” može se čitati na više načina (npr. nula, nulom, nulu) jer je nula napisana brojem. Tako se iz teksta može krivo pročitati “i da se nula ne dijeli”, što nije istina. Nula se može dijeliti. Jasno je da učiteljice u razrednoj nastavi mogu imati problema u ovom dijelu gradiva jer se, eto, već u službenom nacionalnom dokumentu događaju ovakvi propusti vezani uz množenje i dijeljenje nulom.

Dijeljenje i nula u nastavi

Zbrajanje, oduzimanje i množenje nulom lako je objasniti na konkretnim primjerima i s konkretnim predmetima u razredu. Učenici će također pomoću primjera lako shvatiti da oduzimanje $0 - 5$ nije moguće u skupu prirodnih brojeva kao, uostalom, i svako oduzimanje gdje od manjeg broja oduzimamo veći. Tu će poželjni odgovor biti "To nije moguće, jer ne možemo od manjeg (prirodnog) broja oduzeti veći". Nastavnik u pogodnom trenutku može dodati kako osim brojeva $1, 2, 3, 4, \ldots$ postoje i druge vrste brojeva, primjerice oni koji se nalaze na termometru $-1, -2, -3$, itd. (negativni brojevi) i uvođenjem tih brojeva u šestom razredu bit će moguće riješiti probleme poput $0 - 5$, $2 - 8$ i sl.

Što se tiče dijeljenja, učenicima treba ukazati na razliku između "dijeljenja nule" i "dijeljenja nulom". Dijeljenje nule $0 : a = 0$, za a različit od nule, može se objasniti na konkretnim primjerima (npr. "Nemaš ništa, i to ništa podijeliš na 5 dijelova, koliko si dobio? Ništa.", $0 : 5 = 0$).

Veći problem je zorno objasniti, kako učenicima tako i učiteljima, zašto se nulom ne može dijeliti. Za razumijevanje tog problema treba dublje matematičko znanje koje se ne može tako jednostavno objasniti na konkretnim predmetima. No, pravilnom matematičkom edukacijom studenata učiteljskih studija, kao i dobrim primjerima metodičke interpretacije ovog gradiva mogu se pronaći rješenja kako učenicima približiti ovaj problem da razumiju zašto se nulom ne dijeli. Slijedi objašnjenje problema dijeljenja nulom na "popularnoj" razini koja je prihvatljiva učiteljima razredne nastave, učenicima osnovnih škola, roditeljima i svim građanima, bez obzira na struku.

Dijeljenje nulom – a što kažu matematičari?

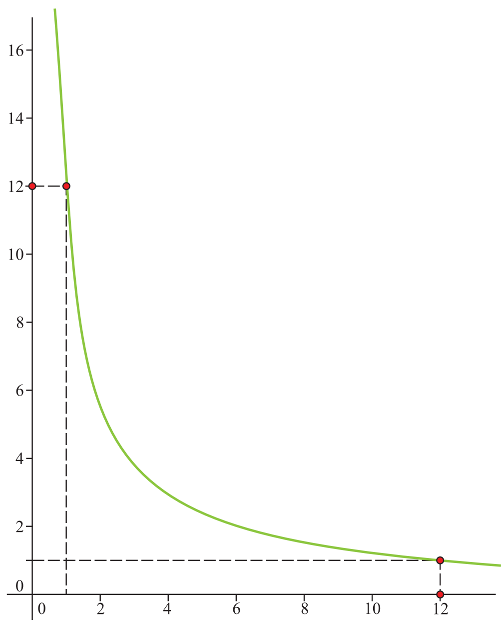
Dijeljenje nulom dugo je matematičarima kroz povijest predstavljalo problem, još od indijskog matematičara Bhaskare iz 12. st. koji spominje da se nulom *ne može dijeliti* u aritmetici, ali dopušta dijeljenje nulom s općim brojevima. Pritom veličini $\frac{a}{0}$ daje posebno ime i s njom postupa slično kako se danas koristi simbol za beskonačnost ∞, o čemu piše u prvom dijelu ovog teksta. Dovođenje u vezu dijeljenja nulom i pojma beskonačnosti s jedne strane donosi nadu da se može pronaći odgovor na pitanje može li se dijeliti nulom i koliki je taj količnik, a s druge strane donosi nove neizvjesnosti jer je beskonačnost sama za sebe "problematičan" matematički pojam. Beskonačnost se spominje već u babilonskoj i starogrčkoj matematici, a simbol za beskonačnost ∞ uveden je u 17. st. u europskoj matematici. *"To nije broj kako su često smatrali matematičari u prošlosti, iako se, na neki način, računske operacije mogu proširiti i na njega."* (Gusić, 1995).

Pojam beskonačnosti našim učenicima nije stran budući da se u osnovnoškolskoj matematici on službeno spominje već u petom razredu osnovne škole (*"Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo", "Pravac se sastoji od beskonačno mnogo točaka"* i sl.), a na intuitivnoj razini se na njega može vjerojatno naići i u nižim razredima osnovne škole u razgovoru na satu, ali i u svakodnevici. Pogledajmo sada kakve veze imaju beskonačnost i dijeljenje nulom.

Pogledajmo ovaj niz u kojem dijelimo broj 12 raznim **djeliteljima** koji se u svakom koraku smanjuju i sve više približavaju nuli:

$12 : 12 = 1,$
$12 : 6 = 2,$
$12 : 4 = 3,$
$12 : 3 = 4,$
$12 : 2 = 6,$
$12 : 1 = 12,$
$12 : 0.5 = 24,$
$12 : 0.1 = 120,$
$12 : 0.01 = 1200,$
$12 : 0.001 = 12\,000,$
$12 : 0.0001 = 120\,000,$
$12 : 0.00001 = 1\,200\,000.$

Ova posljednja dijeljenja u razrednoj se nastavi mogu provesti/provjeriti džepnim računalom. U posljednjem retku djelitelj je vrlo "blizu" nule, iako se niz može nastaviti i dalje s djeliteljima još manjim od ovoga. Primjećujemo da što je djelitelj manji, količnik će biti to veći. I što bliži nuli djelitelj bio, to će količnik biti "bliži beskonačnomu". Zamislimo da 12 dijelimo sa svakim pozitivnim brojem i da vrijednosti crtamo u koordinatni sustav s točkama $(n, 12 : n)$. Pogledajmo sliku:



Krivulja dobivena nacrtanim točkama zove se hiperbola. Kada bismo se još više zdesna približavali nuli na vodoravnoj osi, pripadne vrijednosti na okomitoj osi bile bi sve veće i veće. U onoj posljednjoj graničnoj vrijednosti kada bismo na vodoravnoj osi dosegnuli nulu, graf bi bio visoko "u beskonačnosti". Netko bi mogao reći: "Pa zapišimo onda jednostavno da je $12 : 0 = \infty$ i da tako vrijedi za svaki broj. Tada dijeljenje nulom neće biti zabranjeno jer smo konačno našli rješenje. To je beskonačno." No, budimo oprezni s jednostavnim zapisom tipa $12 : 0 = \infty$ jer beskonačno nije broj u istom smislu kao ostali brojevi i može dovesti do mnogih paradoksa. To je još jedan razlog zašto izbjegavamo dijeljenje nulom. U matematici je stoga uveden pojam limesa (granične vrijednosti) koji će se obrađivati tek u četvrtom razredu gimnazije, a u školskoj matematici najsretnije rješenje ostaje rečenica *"nulom se ne dijeli"*.

"Nulom se ne dijeli"

Pitanje koje možemo očekivati od učenika je: "A zašto se s nulom ne dijeli? Zašto $5 : 0$ nije 0?" Odgovor za njihov uzrast glasi: jer ne možemo naći broj koji bi bio količnik pri dijeljenju nulom. Najkonkretniji dokaz koji možemo dati učenicima u nižim (ali i višim) razredima osnovne škole da se nulom ne dijeli jest onaj pomoću provjere obrnutom operacijom od dijeljenja, a to je množenje. Tako ćemo eliminirati netočnu tvrdnju da je $5 : 0 = 0$. Kada bi ona vrijedila, onda bi vrijedilo pripadno množenje $0 \cdot 0 = 5$, što nije istina. Pitamo se nadalje koji broj možemo staviti umjesto upitnika u dijeljenju $5 : 0 = ?$. Budući da pripadno množenje tada glasi $? \cdot 0 = 5$, zaključujemo da ne možemo naći broj koji dolazi umjesto upitnika jer bilo koji broj pomnožen nulom daje nulu, a ne 5. Dakle, ne možemo naći broj koji je rezultat dijeljenja $5 : 0$. Naravno, to ne vrijedi samo za djeljenik 5, već i za bilo koji drugi djeljenik, pa u višim razredima govorimo o dijeljenju $a : 0$, za $a \neq 0$, uz koje dodajemo: "nulom se ne dijeli".

Evo još jednog primjera vezanog uz dijeljenje nulom. Ima učitelja koji uče djecu da je $5 : 0 = 5$. Ali, znamo da je $5 : 1 = 5$. To bi značilo da dijeljenjem broja 5 s dva različita broja (prvi put dijelimo s 0, a drugi put s 1) dobivamo isti rezultat, što je nemoguće. Djelitelji u tom slučaju trebaju biti jednaki, dakle ispada da je $0 = 1$. Nije moguće podijeliti broj 5 dvama različitim brojevima i dobiti isti rezultat! Ako vrijedi da je $m : x = a$ i $m : y = a$, tada je $x = y$. Svaka jednadžba oblika $m : x = a$ ima samo jedno rješenje, pri čemu su m i a realni brojevi, a x nepoznanica u zadatku.

Na ovom se mjestu možemo upitati: Je li drugi razred osnovne škole prerani stupanj da učenike učimo da se nulom ne dijeli? Odgovor bi bio: Nastavnik bi sam trebao odrediti trenutak kada je pojedini razred spreman za ovu temu. Obično je to na kraju povezivanja operacija množenja i dijeljenja jer se na taj način pokazuje da se nulom ne dijeli.

Dodatni primjeri za nastavni sat

Na nastavnom satu prilikom spominjanja dijeljenja nulom svakako bi trebalo pripaziti na razlike između dijeljenja nule i dijeljenja nulom. Tu važnu informaciju, potkrijepljenu brojnim slikovitim primjerima bliskim učenicima, trebalo bi staviti i na **plakat** i ostaviti da stoji na zidu dulje vrijeme kako bi je učenici s vremenom što bolje usvojili. Učitelj bi pritom s vremena na vrijeme trebao učenike podsjetiti na istaknuti plakat, povezati ga s gradivom i prodiskutirati njegov sadržaj. Primjerice:

Preporučujemo s učenicima obraditi i matematičku pjesmicu "Nula" koja je izašla u MiŠ-u br. 5. Također, problem dijeljenja nulom možemo učenicima približiti konkretnom podjelom neke cjeline na dijelove. Primjerice, skup od 12 cvjetova možemo dijeliti na 6 buketa; tada će u svakom buketu biti po 2 cvijeta. Ako skup od 12 cvjetova dijelimo na 4 buketa, u svakom buketu će biti 3 cvijeta. Smanjujemo li tako broj buketa u heurističkom razgovoru, primijetit ćemo da nam se broj cvjetova u pojedinom buketu povećava. Na kraju ćemo moći napraviti jedan buket u kojem će biti 12 cvjetova. Pitamo se: je li moguće uz 12 cvjetova napraviti 0 buketa? To nije moguće. Ili, je li moguće kredu podijeliti na 0 dijelova? Nije moguće, jer je sama kreda već u jednom komadu.

"Učiteljice, koliko je 0 : 0?"

Ovo je problem koji također treba izbjegavati, ali će se učenicima činiti vrlo jednostavnim jer u ovom slučaju vrijedi provjera množenjem. Tako učenici mogu tvrditi da je $0 : 0 = 0$ jer je $0 \cdot 0 = 0$. No, tada vrijedi i da je $0 : 0 = 5$ jer je $5 \cdot 0 = 0$. Vrijedi i da je $0 : 0 = 387$, jer je $387 \cdot 0 = 0$. Zaključujemo da umjesto upitnika u izrazu $0 : 0 = ?$ možemo staviti bilo koji broj jer će uvijek biti $0 \cdot ? = 0$. Za razliku od slučaja $5 : 0$ gdje nismo mogli pronaći niti jedan broj koji bi odgovarao količniku, ovdje kod $0 : 0$ svi brojevi odgovaraju. Za ovaj problem kažemo da je *neodređen*. Zato bi znatiželjnim učenicima koji postave ovaj problem trebalo objasniti da i dijeljenje nule nulom treba izbjegavati u matematici, kao i dijeljenje broja nulom (s tim da je dijeljenje tipa $a : 0$ nemoguće, a dijeljenje $0 : 0$ neodređeno). Unatoč naizgled konfuznoj situaciji vezanoj uz ove probleme, moje iskustvo s učenicima pokazuje da su ovakvi problemi učenicima vrlo zanimljivi i da ih mogu dobro pratiti ako im ih se približi na prikladan način.

Zaključak

U nastavi matematike uvijek je bilo iznimno važno točno iznošenje činjenica. Gradivo se nadovezuje jedno na drugo i loši temelji ruše cijelu konstrukciju. Činjenica da se nulom ne dijeli nadovezuje se kasnije u petom i šestom razredu na gradivo razlomaka i imperativ da u nazivniku ne smije biti nula. Problem dijeljenja nulom pojavljuje se kod rješavanja jednadžbi kada se transformacijama može dobiti oblik $0 \cdot x = 5$ koji učenici moraju znati pravilno interpretirati (ova jednadžba nema rješenja) ili, pak, $0 \cdot x = 0$ (ova jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja). U srednjoškolskoj matematici se zatim ispituje područje definicije funkcija koje je također vezano uz problem dijeljenja nulom, i tako dalje sve do limesa. Zato je važno napraviti dobre temelje još u matematici razredne nastave. Dijeljenje nulom treba uvesti u pogodnom trenutku i objasniti ga na razini na kojoj to učenici mogu pratiti. U ovom su tekstu prikazani primjeri i prijedlozi kako to napraviti.

Nastavnike matematike osnovne škole pozivam da svojim kolegama iz razredne nastave ukažu na ovu rubriku u MiŠ-u, te da, ako je moguće, na razini škole organiziraju susret svih nastavnika koji predaju matematiku (u predmetnoj i razrednoj nastavi) te da zajedno obrade teme poput ove i porazgovaraju o ostalim zajedničkim problemima koji ih muče.

LITERATURA

[1] Guedj, D. (1996.): *Numbers – The Universal Language*, Harry N. Abrams, Inc., New York

[2] Gusić, I. (1995.): *Matematički rječnik*, Element, Zagreb

[3] MZOS (2006.): *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, HNOS, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, Zagreb

[4] NCTM (1989.): *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

[5] http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/zero/ZERO.HTM