Inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija

Branimir Dakić, Zagreb

Jedan od onih dijelova programa matematike u srednjoj školi, čiji bi sadržaj i svrhu učenja valjalo temeljito preispitati, jesu trigonometrijske funkcije. U gimnazijama, primjerice, ali ne samo u njima, ovo gradivo zauzima povelik prostor, gotovo polovinu programa 3. razreda, što je cijelo prvo polugodište.

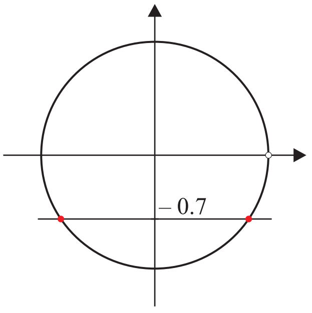
"Opća trigonometrija" obiluje mnoštvom raznih identiteta i formula, a njezina se obrada nerijetko svodi na razvijanje vještine algebarskih manipulacija s tim izrazima pri čemu ni smisao ni cilj tih postupaka baš i nisu uvijek jasni. Reklo bi se kako je ovakav način obrade trigonometrijskih funkcija, a u gradivu srednje škole ima još sličnih primjera, *povijesno naslijeđe* koje je pregazilo vrijeme. Moderno je doba u područjima raznih znanosti donijelo brojne primjene trigonometrijskih funkcija, što je razumljivo ima li se u vidu njihova temeljna osobina, periodičnost, osobina koja je svojstvena mnogim prirodnim procesima i pojavama. Zbog toga nema govora o ispuštanju ovog gradiva, već je neophodna njegova prilagodba.

Zanimljivo je da je u istom programu zanemarena jedinica *Inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija*, didaktički vrlo vrijedan sadržaj, koji može doprinijeti potpunijem razumijevanju ovih funkcija i njihovih svojstava. Ali ne samo ovih jer njihova obrada zasigurno utječe i na bolje razumijevanje važnih pojmova vezanih uz realne funkcije općenito. Ovomu je članku svrha uvjeriti čitatelje u opravdanost izrečenih stavova.

Postavimo jedan čest i jednostavan zadatak:

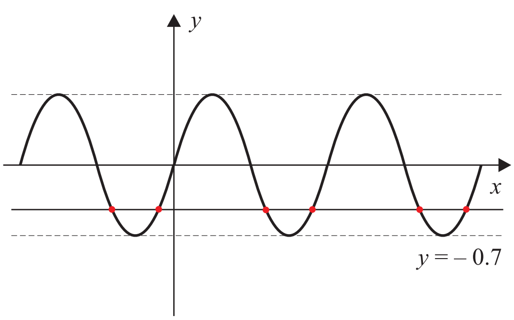
Odrediti realni broj x za koji je $\sin x = -0.7$.

Na brojevnoj kružnici, što je svakako bolji naziv nego na trigonometrijskoj kružnici, valja odrediti točku s ordinatom -0.7. Dva su rješenja, dvije su točke s ordinatom -0.7 i u svakoj od njih smješteno je beskonačno mnogo brojeva.



Slika 1.

Dakako postoji i kvalitetnije rješenje, ono uključuje razumijevanje grafova trigonometrijskih funkcija. Nacrtamo sinusoidu i povučemo pravac $y = -0.7$. Taj pravac siječe sinusoidu u beskonačno mnogo točaka tipa $(x, -0.7)$. Za svaki takav x je $\sin x = -0.7$.



Slika 2.

Svakako je didaktički vrijedna usporedba ovih dvaju rješenja.

No praktični zadaci, zadaci u kojima se primjenjuje trigonometrija, zahtijevaju sasvim jednostavno i čim točnije rješenje. U pravilu nalazimo ga uz pomoć džepnog kalkulatora. Uzmemo li dakle u ruku džepni kalkulator, on će nam odgovoriti da je $\sin(-0.775397496) = -0.7$ (dakako, približno), odnosno dat će za x rješenje iz intervala $\langle 0, -\frac{\pi}{2}\rangle$, apscisu prvog "lijevog" sjecišta sinusoide i pravca $y = -0.7$.

I sada se nameću pitanja:

Zašto je kalkulator izbacio baš ovo rješenje? Zašto nije izbacio najmanje pozitivno? Što je s ostalim rješenjima? Kako doći do prvog sljedećeg rješenja?

Mogli bismo odgovoriti: Sva su rješenja ravnopravna, zapišemo li jedno, uzmimo baš navedeno, ostala će biti obuhvaćena zapisom $-0.775397496 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Nije problem zaključiti kako i za sve brojeve $(\pi + 0.775397496) + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ također vrijedi da im je sinus jednak -0.7.

Razumljivo, "obični" kalkulator ne može odgovoriti na sva naprijed postavljena pitanja, on daje jedinstven odgovor iz kojega trebamo sami izvesti dalje zaključivanje.

Problem određivanja argumenta iz dane vrijednosti neke od trigonometrijskih funkcija u sebi implicitno sadržava problem inverzije tih funkcija. No inverzna funkcija neke realne funkcije postoji jedino uz uvjet da je sama funkcija bijekcija, odnosno da jednadžba $f^{-1} \circ f(x) = x$ ima jedinstveno rješenje za x.

Možda se može provesti malo ponavljanje uz podsjećanje na kvadratnu funkciju. Naime, za funkciju $f(x) = x^2$ vrijedi $f(-x) = f(x)$, za svaki realni broj x (kvadrati suprotnih brojeva su jednaki). Obrnut problem, određivanja funkcije f^{-1} za koju vrijedi $f^{-1} \circ f(x) = x$ uvjetuje da se drugi korijen definira kao nenegativan broj. Podvlači se: *Korijen iz pozitivnog realnog broja pozitivan je broj*.

Vrlo je bitno razlikovati tu činjenicu od činjenice da jednadžba $x^2 = a$, $a \geq 0$ ima dva rješenja, jedno je drugi korijen iz a, broj $\sqrt{a}$, a drugo je tom broju suprotan broj, broj $-\sqrt{a}$.

Podsjetimo još kako se i u drugom razredu srednje škole nailazi na dvije međusobno inverzne funkcije, eksponencijalnu i logaritamsku.

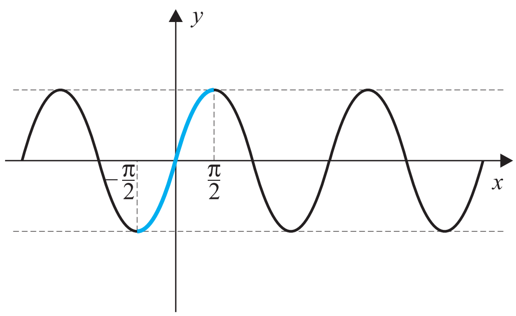
Dakle, problem inverznosti neke funkcije povlači zahtjev za njezinom jednoznačnošću. To znači da različitim vrijednostima varijable pripadaju različite vrijednosti funkcije. Ili, drugim riječima, jednadžba $f(x) = a$ ima jedinstveno rješenje za svaki broj a za koji ona ima smisla (primjerice $\sin x = -3$ nema smisla). Mora biti ispunjen i zahtjev da jednadžba $f^{-1} \circ f(x) = c$ ima rješenje za sve vrijednosti c funkcije f.

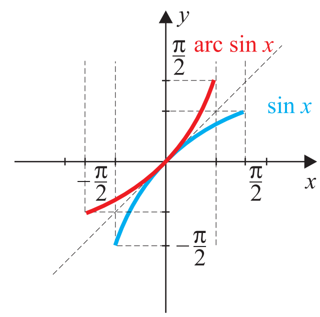
Trigonometrijske su funkcije periodične. Sama ta činjenica povlači da te funkcije nisu injekcije pa onda i ne mogu imati inverzne funkcije.

Ako pak promatramo restrikciju pojedine trigonometrijske funkcije na neki interval nad kojim je ona monotona (rastuća ili padajuća), onda tako "suženoj" funkciji možemo odrediti inverznu funkciju.[1]

Funkcija $f(x) = \sin x$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ monotono je rastuća i u tom intervalu jednadžba $f(x) = \sin x = y_0$, $-1 \leq y_0 \leq 1$ ima jedinstveno rje-

[1] Primijetimo da je to razlog zbog kojeg je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ inverzna funkcija funkcije $g(x) = x^2$ uz uvjet $x \in \mathbf{R}^+$.





Slika 3. a) Graf funkcije $f(x) = \sin x$ nad intervalom $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, b) Graf funkcije $f(x) = \arcsin x$

šenje koje označavamo s $\text{arc sin } y_0$. Očigledno je $\text{arc sin } y_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\sin x_0 = y_0 \Leftrightarrow \text{arc sin } y_0 = x_0.$$

Možemo zapisati i sljedeće jednakosti:

$$\text{arc sin }(\sin x) = x \quad \text{i} \quad \sin(\text{arc sin } y) = y.$$

Primijetimo:

Funkcija arc sin je neparna, odnosno vrijedi:

$$\text{arc sin }(-x) = -\text{ arc sin } x.$$

Obrazloženje ove jednostavne činjenice prepuštamo čitateljima.

A jer je funkcija sinus na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ rastuća, njezina inverzna funkcija je rastuća na intervalu $[-1, 1]$.

Na sličan se način razmatra problem za funkciju kosinus i uvodi definicija njezine inverzne funkcije $f(x) = \text{arc cos } x$. Pritom se funkcija $f(x) = \cos x$ promatra na intervalu $[0, \pi]$ nad kojim je ona monotono padajuća.

Vrijedi dakle:

$$\cos x = y \Leftrightarrow \text{arc cos } y = x,$$

odnosno, $\text{arc cos }(\cos x) = x$ i $\cos(\text{arc cos } y) = y$, za svaki $x \in [0, \pi]$ i svaki $y \in [-1, 1]$.

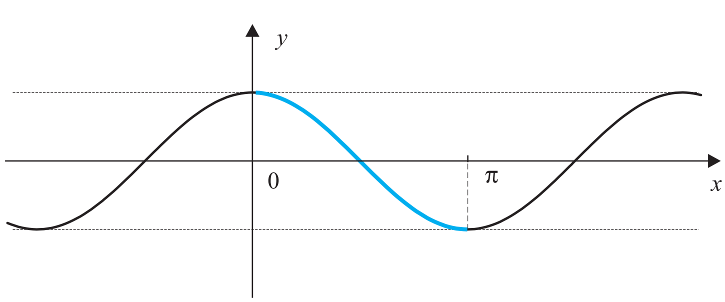
$$\text{arc sin } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2}.$$

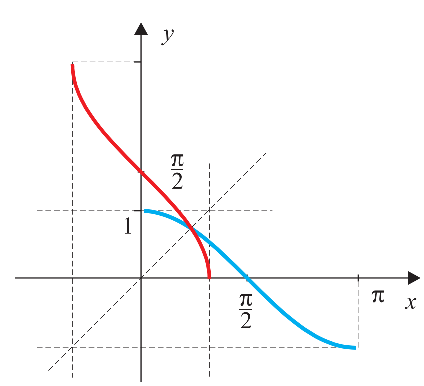
Nakon prethodne obrade funkcija $\text{arc sin } x$ i $\text{arc cos } x$ dobro je navesti nekoliko što jednostavnijih primjera:

Primjer 1. Izračunajte:

$$\text{arc sin } \frac{1}{2} + \text{arc cos } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rješenje: $\text{arc sin } \frac{1}{2} + \text{arc cos } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$





Slika 4. a) Graf funkcije $f(x) = \cos x$ nad intervalom $[0, \pi]$, b) Graf funkcije $f(x) = \text{arc cos } x$

Zadatak 2. Izračunajte:

$$\sin\left(\arc\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arc\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

Primjer 2. Dokažimo sljedeću činjenicu:

$$\arc\cos(-x) = \pi - \arc\cos x,\ x \in [-1, 1].$$

Rješenje: Najprije je $\cos(\arc\cos(-x)) = -x$.

Izračunajmo i za desnu stranu ove jednakosti:

$$\cos(\pi - \arc\cos x) = -\cos(\arc\cos x) = -x.$$

Nadalje, prema definiciji arkusa je $0 \le \arc\cos(-x) \le \pi$, a iz $0 \le \arc\cos(-x) \le \pi$ slijedi:

$$0 \le \pi - \arc\cos x \le \pi.$$

Kako je kosinus na intervalu $[0, \pi]$ monoton, dokazali smo postavljenu tvrdnju.

Zadatak 3. Dokažite: $\arc\sin x = \frac{\pi}{2} - \arc\cos x$.

Primjer 3. Dokažimo da za svaki $t \in [-1, 1]$ vrijedi jednakost $\arc\sin t + \arc\cos t = \frac{\pi}{2}$.

Rješenje: Iz $0 \le \arc\cos t \le \pi$ slijedi:

$$-\frac{\pi}{2} \le \arc\cos t \le \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, lijeva i desna strana jednakosti koju dokazujemo pripadaju intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Izračunamo li sinus obaju dijelova, dobit ćemo $\sin(\arc\sin t) = t$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arc\sin t\right) = \cos(\arc\cos t) = t$.

Na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ funkcija sinus je monotona pa slijedi:

$$\arc\sin t = \frac{\pi}{2} - \arc\cos t.$$

I na kraju razmotrimo još funkciju koja je inverzna funkciji $f(x) = \operatorname{tg} x$ s područjem definicije. Ova je funkcija definirana na cijelom skupu $\mathbf{R}$, a vrijednosti su unutar intervala $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Možemo pisati:

$$\operatorname{tg} x_0 = y_0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} y_0 = x_0.$$

ili $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0) = x_0$ i $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y_0) = y_0$.

Vrijedi $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, za svaki realni broj x, odnosno, arkus tagens je neparna funkcija.

Primjer 4. Izračunajte $\sin(\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(1))$.

Rješenje: $\sin(\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(1))$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

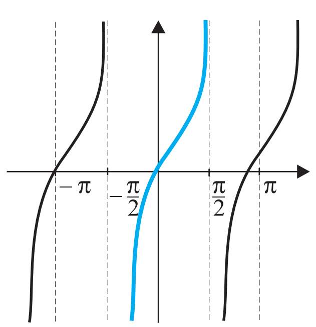
Primjer 5. Izračunajmo $\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 5$.

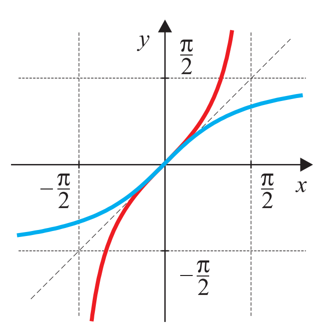
Rješenje: Označimo $a = \operatorname{arctg} 4$ i $b = \operatorname{arctg} 5$, što znači $\operatorname{tg} a = 4$ i $\operatorname{tg} b = 5$, pri čemu je $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$.

Slijedi $-\frac{\pi}{2} < a - b < \frac{\pi}{2}$. I sada je:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = -\frac{1}{21}.$$

Dakle je $a - b = \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 5 = -\frac{1}{21}$.





Slika 5. a) Graf funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$ nad intervalom $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, b) Graf funkcije $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$