

Priprema nastavnika i učenika za matematička natjecanja

Zdravko Kurnik, Zagreb



Redovita nastava ne može u potpunosti zadovoljiti potrebe i interese određenoga broja učenika s posebnim sklonostima i sposobnostima za dublje razumijevanje matematike, koji uz odgovarajući rad mogu kasnije dati natprosječne rezultate. Zato se nameće potreba da se razvijaju i njeguju posebne aktivnosti koje omogućuju što ranije otkrivanje takvih učenika i usmjeravanje i praćenje njihova rada.

Postoje razne mogućnosti s kojima kreativan nastavnik matematike može razvijati stvaralačko mišljenje i matematičke sposobnosti svojih učenika. Posebno su važna matematička natjecanja, jer se na njima učenicima ispunjava prirodna želja da provjere svoje matematičke sposobnosti.

Za svako natjecanje potrebne su odgovarajuće pripreme.

U članku [16] bilo je govora i o pripremama nastavnika i učenika za matematička natjecanja. U ovom članku ukazujemo na važnije korake tih priprema, nadopunjene kratkom metodičkom obradom nekoliko matematičkih područja iz kojih se često zadaju natjecateljski zadaci.

Slabosti, pogreške i mjere

Razgovori s nastavnicima-mentorima, rasprave na seminarima, u metodičkim radionicama i na okruglim stolovima ukazuju na to da već u fazi priprema u našim školama postoji velika šarolikost. Jedni nastavnici redovito pripremaju svoje najbolje učenike za natjecanja, drugi ne. Često, kad pripreme i postoje, ne vrše se na najbolji način, a najčešće su one pripreme koje se vrše nekoliko dana pred samo natjecanje. Učenici, koji su tako pripre-

mani, nemaju stabilna matematička znanja, pa nije čudo da na natjecanjima rade pogreške i ondje gdje se to najmanje očekuje. Evo čestih pogrešaka učenika pri rješavanju zadataka:

nepotpuna analiza zadatka, nepravilno zaključivanje, zapostavljanje preciznog logičkog slijeda izvođenja, brzopletost pri pismenom izražavanju, neurednost i nepreglednost koraka u radu, manjkavi i netočni crteži, zapostavljanje teksta i objašnjavanja postupka rješavanja, učenik ne može procijeniti težinu zadatka i dr.

Što mogu učiniti nastavnici matematike u cilju poboljšanja stanja na području priprema učenika za matematička natjecanja?

Neke mjere mogu poduzeti već u **redovitoj nastavi** tijekom cijele školske godine. U te mjere ubrajaju se: dodatni zadaci za naprednije učenike, analiza zadataka s natjecanja, smanjivanje velikoga broja standardnih zadataka i povećanje broja problemskih zadataka, prilagođavanje zadataka primjeni i razvijanju nekih matematičkih postupaka koji služe za uvođenje učenika u stvaralački rad, posvećivanje veće pozornosti metodičkoj strani procesa rješavanja zadataka, njegovanje kreativnosti učenika i dr.

Mjere za intenzivnije pripreme učenika za natjecanja **izvan redovite nastave** jesu rad u matematičkim grupama, rad u matematičkim radionicama, obrada stručne literature, razmjena ideja i postupaka putem e-maila i dr.

Struktura obrade nekog područja

Navedene mjere koje se odnose na poboljšanje priprema učenika za natjecanja putem dublje stručne i metodičke obrade nekog područja matematike mogu se preciznije razraditi u nekoliko odjeljaka:

1) Zadaci s naših natjecanja. Upoznavanje učenika sa zadacima koji su iz određenog područja matematike posljednjih nekoliko godina zadanani na natjecanjima igra važnu ulogu u pripremi. Kao prvo, učenici uviđaju potrebu rješavanja takve vrste zadataka, jer se slični zadaci mogu pojaviti na idućim natjecanjima. Kao drugo, proučavajući rješenja takvih zadataka spoznaju kakva je težina natjecateljskih zadataka. Kao treće, otkrivaju kod sebe mogući nedostatak znanja za rješavanje takve vrste zadataka. Uzevši sve to zajedno, ovaj korak možemo nazvati – *psihološkom pripremom učenika*.

2) Teorijska osnova. Za uspješno rješavanje zadataka iz nekog područja matematike potrebna je prije svega primjerena teorijska osnova i njezina dobra metodička razrada. Teorijsku osnovu čine odgovarajuće činjenice, svojstva, tvrdnje, poučci, metode iz školske matematike. Te činjenice ističemo tek pri rješavanju konkretnih zadataka.

Za natjecateljske zadatke, koji su u pravilu problemski zadaci, potrebna je bogatija teorijska osnova i dodatne činjenice. To su poučci, postupci i metode rješavanja koji nisu izravno iz školske matematike, ali je poželjno da ih napredniji učenici znaju. Upoznavanje naprednijih učenika s tim činjenicama možemo smatrati primjerenim radom na razvoju njihovih matematičkih sposobnosti, a posebno na boljoj pripremljenosti za matematička natjecanja. Povoljna je okolnost da mnogi natjecatelji imaju veća znanja o zadacima od onih koja dobivaju u redovitoj nastavi. Ta znanja oni su stekli

samostalno iz nekih drugih izvora. Međutim, još uvijek postoji nesklad između redovitih i dodatnih znanja. S tim je u uskoj vezi nedoumica koju nakon natjecanja izaziva pitanje famoznih “0 bodova” nekih učenika na rang-listama natjecanja. Kako je to moguće?

Jedan od mogućih odgovora jest: nepoznavanje metoda rješavanja. Metode rješavanja matematičkih problema su posebna znanja o kojima vrlo često ovisi uspjeh ili neuspjeh učenika na natjecanjima. Zbog nepoznavanja metoda mnogi se natjecateljski zadaci njima čine težima nego što to oni stvarno jesu. Rješenje toga problema treba tražiti u okviru proširenja teorijske osnove. Kako u svakom području matematike postoji niz razrađenih i učinkovitih metoda rješavanja raznovrsnih problema, potrebno je samo da nastavnik napravi kratku metodičku razradu pojedine metode i upozna svoje učenike-natjecatelje s njezinom primjenom i djelotvornošću. Poznavanje dovoljnoga broja učinkovitih metoda rješavanja matematičkih problema omogućuje lakše svladavanje novih problema i pozitivno utječe na matematičke sposobnosti i trajnost znanja učenika. To poznavanje ujedno osnažuje psihološku pripremu učenika za natjecanja.

Poželjno je da u okviru priprema za natjecanja nastavnik matematike upozna svoje učenike s nekim od sljedećih metoda: *metodom analogije, metodom supstitucije, metodom neodređenih koeficijenata, metodom rekurzije, metodom matematičke indukcije, metodom razlikovanja slučajeva, metodom superpozicije, metodom uzastopnih približavanja, Descartesovom ili algebarskom metodom* i dr.

U ovom koraku priprema nastavnik matematike treba još provjeriti koja dodatna znanja imaju njegovi natjecatelji, upoznati ih s dodatnim činjenicama iz obrađivanog područja, poticati ih da pri rješavanju odabranih zadataka i sami pronađu neki novi način rješavanja primjenom nekog novog postupka, ukazati im na vrijednosti međusobne komunikacije, grupnog rada i rada u matematičkoj radionici i dr. Ovaj korak možemo nazvati – *aktiviranjem znanja*.

3) Problemi u matematičkoj radionici. Za rad učenika u matematičkoj radionici nastavnik matematike treba pripremiti primjeren izbor zadataka iz odabranoga područja. Primjerenost u ovom koraku priprema znači: optimalan broj zadataka kojim se pokriva područje, raznovrsnost po sadržaju, raznovrsnost po težini. Ovaj korak možemo nazvati – *upoznavanjem područja obrade*.

4) Analiza, rješavanje i kreativnost. Ovo je središnji dio priprema. Tu se treba zbiti sve ono što će učenicima pomoći u uspješnom sudjelovanju na natjecanjima: analiza svakog zadatka i ustanovljavanje njegove težine, aktiviranje i povezivanje predznanja, iznošenje osobnog mišljenja, razmjena ideja, otkrivanje i osmišljavanje načina rješavanja, odabir teorijske osnove, djelotvorna rasprava o rezultatima samostalnog i zajedničkog rada. Nastavnik matematike posebnu pozornost treba posvetiti iznošenju novih ideja učenika, otkrivanju novih metoda rješavanja, uočavanju originalnih rješenja. Na temelju toga može se zaključiti da je težište rada u radionici na pristupu, idejama, metodama rješavanja i njegovanju kreativnosti učenika. Ovaj korak priprema možemo nazvati – *ovladavanjem područja obrade*.

5) Dodatni problemi. Da bi znanje učenika bilo trajnije i učenici sigurniji pri rješavanju zadataka iz obrađenoga područja, nastavnik matematike treba pripremiti i izbor dodatnih zadataka. Ti zadaci obično se predviđaju za novu matematičku radionicu, a učenici ih mogu koristiti za samostalni rad na pripremanju za natjecanja. Ovaj korak možemo nazvati – *utvrđivanjem*.

Izbor područja

U programima po kojima se učenici natječu piše da za više razine natjecanja oni trebaju poznavati i sljedeća dodatna područja: *kombinatorne zadatke, logičke zadatke, diofantske jednadžbe, Dirichletov princip (OŠ), matematičku indukciju, elementarnu teoriju brojeva, osnovne nejednakosti o sredinama (SŠ)*.

Evo kratkih i sažetih prikaza obrade nekih područja koja trebaju poznavati natjecatelji iz osnovnih

škola i nekih područja koja trebaju poznavati natjecatelji iz srednjih škola.

DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Diofantske jednadžbe su linearne ili nelinearne algebarske jednadžbe s dvije ili više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima za koje se traže cjelobrojna (ili racionalna) rješenja. Pritom se uzima da je broj nepoznanica veći od broja jednadžbi.

Metodika rješavanja diofantskih jednadžbi zasniva se na sljedećoj strukturi:

Pojam diofantske jednadžbe, zadaci s matematičkih natjecanja, osnovna svojstva brojeva, linearna diofantska jednadžba, Pitagorina jednadžba i Pitagorini brojevi, metode rješavanja (metoda umnoška, metoda kvocijenta, metoda parnosti, metoda posljednje znamenke, metoda nejednakosti), diofantske jednadžbe u matematičkoj radionici, dodatni zadaci.

Osnovna literatura: [13], [15], [22], [25], [14].

DIRICHLETOVO NAČELO

U rješavanju raznovrsnih problema, posebno pri dokazivanju postojanja objekata koji imaju neko određeno svojstvo, često je vrlo uspješna primjena jednog od najpoznatijih kombinatornih principa, koji je poznat pod raznim popularnim nazivima kao što su *princip kutija, princip pretinaca, princip golubinjaka, problem zečeva i kaveza* i dr. Njemački matematičar Dirichlet ga je prvi jasno formulirao i dao mu precizan matematički smisao. Zato taj princip nosi njegovo ime. Mi ćemo ga u daljnjemu tekstu u duhu našeg jezika nazivati **Dirichletovim načelom**.

Dirichletovo načelo može se formulirati na različite načine. Navodimo najčešću, popularnu formulaciju:

Ako $n + 1$ zečeva rasporedimo bilo kako u n kaveza, onda su u barem jednom kavezu smještena barem 2 zeca.

Metodika obrade Dirichletova načela zasniva se na sljedećoj strukturi:

Različite formulacije Dirichletova načela, zadaci s matematičkih natjecanja, odabrani zadaci za ma-

tematičku radionicu (osobe, stvari, teorija brojeva, geometrija, mješoviti zadaci, dodatni zadaci).

Osnovna literatura: [12], [5], [15], [4], [1], [23], [2].

NEJEDNAKOSTI

Za uspješno rješavanje zadataka iz ovoga područja matematike potrebne su stanovite predradnje. O tome području učenici već imaju određeno školsko znanje, dio učenika zna neke dodatne činjenice, a za složenije zadatke iz područja trebati će svima novo znanje. Sve to treba imati na umu nastavnik matematike kad započinje rad s natjecateljima.

Metodika dokazivanja nejednakosti zasniva se na sljedećoj strukturi:

Zadaci s nejednakostima na matematičkim natjecanjima, provjera predznanja učenika o području, osnovna svojstva nejednakosti, jednostavne nejednakosti, posebne nejednakosti, metode dokazivanja (jednostavni načini, primjena posebnih nejednakosti, posebni postupci, primjena metode matematičke indukcije, primjena analitičko-sintetičke metode), analogoni i poopćenja jednostavnih i posebnih nejednakosti, nejednakosti u matematičkoj radionici, dodatni zadaci s nejednakostima.

Osnovna literatura: [9], [15], [1], [2].

ELEMENTARNA TEORIJA BROJEVA

Zadaci u kojima se istražuju svojstva brojeva vrlo su česti na matematičkim natjecanjima. Zato je prirodno i nužno da se u okviru priprema natjecatelja napravi bar jedna matematička radionica iz ovoga područja. Ova radionica namijenjena je učenicima viših razreda osnovne škole i nižih razreda srednje škole.

Metodika obrade područja:

Zadaci o brojevima s matematičkih natjecanja, djeljivost, prosti i složeni brojevi, djelitelji i višekratnici, Euklidov algoritam, diofantske jednadžbe, osnovni poučci o brojevima, kongruencije, zadaci za rad u matematičkoj radionici, dodatni zadaci.

Osnovna literatura: [22], [25], [1], [2].

GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE

Konstruktivni zadaci ne pojavljuju se tako često na matematičkim natjecanjima, ali je njihova važnost druge naravi. One su vrlo pogodne za razvoj logičkog i stvaralačkog mišljenja učenika, koje igra veliku ulogu pri rješavanju svakog natjecateljskog zadatka. Zato se preporučuje nastavnicima-mentorima da u pripreme učenika za natjecanja uključe i ovakvu matematičku radionicu. Prednost radionice u odnosu na druge radionice leži u činjenici da se analiza, rješavanje i provjera rješenja nekog konstruktivnog zadatka mogu neposredno zorno izvoditi u nekom računalnom programu (preporuka: The Geometer's Sketchpad, GeoGebra).

Metodika rješavanja konstruktivnih zadataka zasniva se na sljedećoj strukturi:

Osnovne konstrukcije, konstruktivne metode (metoda presjeka, metoda pomoćnih likova, metoda osne simetrije, metoda rotacije, metoda centralne simetrije, metoda translacije, metoda sličnosti, algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka), konstruktivni zadaci u matematičkoj radionici, dodatni konstruktivni zadaci.

Osnovna literatura: [6], [7], [10], [11], [15], [25].

ZADACI S VIŠE NAČINA RJEŠAVANJA

Ovo nije neko posebno područje matematike, jer u svakom njezinu području postoje zadaci koji se mogu riješiti na više načina. I na matematičkim natjecanjima česti su takvi zadaci. Natjecatelji znaju ugodno iznenaditi članove ocjenjivačkih povjerenstava nalaženjem sasvim novih načina rješavanja postavljenih zadataka. To je povod da se napravi mali izbor takvih zadataka za jednu matematičku radionicu. Međutim, ova radionica ima i drugu svrhu. Zadaci s više načina rješavanja dobro su sredstvo za aktivnije promišljanje učenika i djelotvornije ponavljanje i utvrđivanje stečenog znanja. Za nalaženje rješenja nekog zadatka potrebno je određeno znanje koje se sastoji od teorijskih činjenica koje su u najužoj vezi sa zadatkom. Za jedan način rješavanja potrebne su jedne činjenice, za drugi način neke druge činjenice, za treći treće. Zaključujemo da će za rješavanje zadatka na više načina trebati više teorijskih činjenica i

metoda nego za rješavanje na samo jedan način. Time se za samo jedan zadatak aktivira, analizira i primjenjuje veća količina stečenog znanja učenika, a njihovo mišljenje postaje pokretljivije. Osim toga, znanja učenika se produbljuju i proširuju novim znanjima, a najvažnije je da zadaci s više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes prema matematici.

Metodika rješavanja takvih zadataka zasniva se na sljedećoj strukturi:

Matematički zadatak (sastav zadatka, vrste zadataka, zadaci s više načina rješavanja), metode (metoda razlikovanja slučajeva, metoda supstitucije, metoda neodređenih koeficijenata i dr.), pomoćni teoremi, pomoćne jednakosti, pomoćne nejednakosti, zadaci u matematičkoj radionici (iz raznih područja matematike), dodatni zadaci.

Osnovna literatura: [8].

Zaključak

Uspjeh učenika na matematičkim natjecanjima ovisi u velikoj mjeri o kvaliteti priprema. Iako je bilo

kakav oblik priprema koristan i dobrodošao, ipak treba iz godine u godinu poboljšavati i usavršavati rad s naprednijim učenicima, a pripreme za natjecanja učiniti još djelotvornijima. Materijala za taj rad ima dovoljno, samo ga treba razvrstati, metodički srediti i oblikovati za primjerene pripreme.

U ovom članku opisana je u sažetom obliku metodička obrada nekoliko područja matematike za koja postoje prilično dobro metodički oblikovani materijali po kojima se može neposredno raditi. Poželjno je da se i za druga područja matematike, iz kojih na natjecanja često "stižu" sve noviji i noviji zadaci, također izrade takvi materijali. Tu još ima posla za sve nas!

Dobre pripreme čine znanja učenika stabilnijim, a učenici postaju i stručno i psihološki spremniji na nove izazove.

Kada trebaju početi pripreme za novi ciklus natjecanja? Odgovor je jasan: pripreme nastavnika i učenika za matematička natjecanja trebaju, u ovom ili onom obliku, početi kad i nova školska godina!

LITERATURA

- [1] A. Dujella, M. Bombardelli, S. Slijepčević, *Matematička natjecanja učenika srednjih škola*, HMD i Element, Zagreb, 1996.
- [2] Elezović N., *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Element, Zagreb, 1992.
- [3] Hanjš Ž., *Međunarodne matematičke olimpijade*, Element, Zagreb, 2006.
- [4] M. Krnić, *Dirichletovo pravilo*, HMD, Matkina biblioteka, Zagreb, 2001.
- [5] Z. Kurnik, *Dirichletov princip*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 2 (1993.), 9-16.
- [6] Z. Kurnik, *Geometrijske konstrukcije*, Poučak 9 (2002), 34-41.
- [7] Z. Kurnik, P. Mladinić, R. Svedrec, *Osnovne konstrukcije*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 13 (2004), 65-86.
- [8] Z. Kurnik, *Zadaci s više načina rješavanja*, HMD, Matkina biblioteka, Zagreb, 2004.
- [9] Z. Kurnik, *Nejednakosti*, HMD, Matkina biblioteka, Zagreb, 2004.
- [10] Z. Kurnik, *Osnovne konstrukcije i osnovna primjena*, Matematika i škola 29 (2005), 148-152.
- [11] Z. Kurnik, *Konstruktivne metode*, Matematika i škola 30 (2005), 195-201.
- [12] Z. Kurnik, *Dirichlet i njegov princip*, Matematika i škola 28 (2005.), 107-111.
- [13] Z. Kurnik, *Diofantske jednadžbe*, HMD, Matkina biblioteka, Zagreb, 2007.
- [14] Z. Kurnik, *Diofantske jednadžbe*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 16 (2007.), 56-70.
- [15] Z. Kurnik, *13 matodičkih radionica*, HMD, Matkina biblioteka, Zagreb, 2007.
- [16] Z. Kurnik, *Metodička strana matematičkih natjecanja*, Matematika i škola 44 (2008.), 148-151.
- [17] N. Lukač, P. Mladinić, R. Svedrec, S. Varošaneć, Z. Varošaneć, *Matematičko natjecanje Klokani bez granica 1999.-2004.*, HMD, Zagreb, 2005.
- [18] *Matematička natjecanja* (knjižice za godišnje cikluse natjecanja), Element i HMD, Zagreb.
- [19] *Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj za 7. i 8. razred osnovne i 1. razred srednje škole 1992.-2006.*, HMD, Matkina biblioteka, Zagreb, 2007.
- [20] *Matematičko-fizički list*, HMD i HFD, Zagreb.
- [21] *Matka*, časopis za mlade matematičare, HMD, Zagreb.
- [22] B. Pavković, B. Dakić, P. Mladinić, *Elementarna teorija brojeva*, HMD i Element, Zagreb, 1994.
- [23] B. Pavković, B. Dakić, P. Mladinić, Ž. Hanjš, *Male teme iz matematike*, HMD i Element, Zagreb, 1994.
- [24] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prijevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb, 1956.
- [25] V. Stošić, *Natjecanja učenika osnovnih škola*, HMD, Zagreb, 2000.