Cavalierijeva načela

Branimir Dakić, Zagreb

U 14. stoljeću u talijanskoj je Sieni osnovan novi svećenički red poznat kao Jezuati. Godine 1367. papa Urban priznao je djelovanje ovog reda čija je glavna skrb bila pomoć pogođenima od "crne smrti" (kuge) što je tada harala diljem Europe. Jezuatima je 1613. pristupio tek 15-godišnji Bonaventura Cavalieri koji je pod okriljem ovoga reda proveo čitav svoj život. Vrlo se često u literaturi može naći da je Cavalieri bio Jezuit, što je netočno, a posljedica je sličnosti naziva ovih dvaju redova. Bonaventura Cavalieri rođen je u Milanu 1598. Bio je Galilejev učenik, a djelovao je na Sveučilištu u Bologni sve od 1629. pa do smrti godine 1647. Bio je jedan od najutjecajnih matematičara svoga vremena, a bavio se trigonometrijom, geometrijom, optikom, astronomijom i astrologijom. Svjestan velikog značenja logaritama zaslužan je za njihovo rano prihvaćanje u talijanskim matematičkim krugovima.

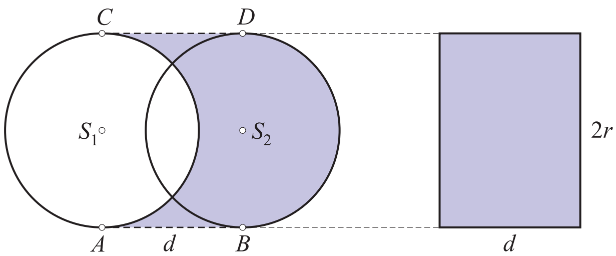
Cavalieri je objavio više djela: *Lo Specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche* (1632.), *Directorium generale uranometricum in quo trigonometri fundamenta ac regul demonstrantur* (1632.), *Rota planetaria* (1640.), *Trigonometria plana et sphrica linearis et logarithmica* (1635.). No najpoznatije mu je djelo *Geometria indivisibilibus continuorum nov qudam ratione promota* tiskana prvi put 1635. Djelo je posvećeno jednoj specifičnoj metodi bliskoj metodi ekshaustije koju su primjenjivali starogrčki matematičari, posebice Demokrit i Arhimed. Premda je knjiga naišla na žestoke kritike, prije svih švicarskog matematičara Paula Guldina (1577. – 1643.), njezina se objava u povijesti matematike danas drži velikim događajem. Na nju se nadovezuju kasniji radovi mnogih matematičara, posebice Keplera. Knjiga je pisana suviše verbalistički i nije jednostavno razobličiti i dokučiti detalje Cavalierijevih postupaka. Cavalieri slijedi svoju ideju nedjeljivosti. Naime, geometrijski se likovi promatraju kao strukture satkane od nedjeljivih elemenata: točaka tankih niti ili ravnih slojeva. Tako je svaka dužina unija nedjeljivih točaka, ravniniski lik satkan je od beskonačno mnogo tankih i međusobno paralelnih dužina, a svaki je prostorni oblik slog beskonačno tankih i međusobno paralelnih slojeva. Nakon takvog pristupa, ističu se dva načela, od kojih je drugo poopćenje prvog, a u srednjoj se školi prihvaćaju i primjenjuju bez dokaza.

Prvo Cavalierijevo načelo:

Ako pri presijecanju dvaju likova u ravnini skupom paralelnih pravaca u svakom pojedinom slučaju dobijemo dvije dužine čije su duljine u istom omjeru, onda su u istom omjeru i površine tih dvaju likova.

Prikažimo na nekoliko jednostavnih primjera kako je učinkovito ovo Cavalierijevo načelo.

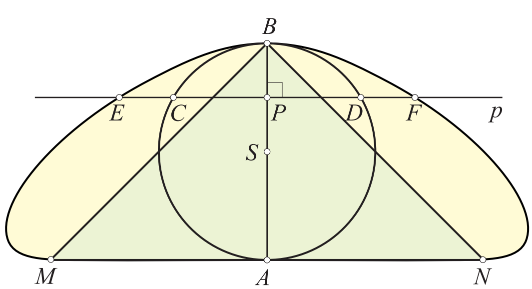
Primjer 1. Neka je dan krug polumjera r. Translatiramo taj krug za dužinu duljine d i promotrimo lik L koji je trag kruga pri toj translaciji (na slici je osjenčan). Kolika je njegova površina?



Slika 1.

Konstruirajmo pravokutnik čija je osnovica duga d, a druga stranica ima duljinu $2r$. Površina tog pravokutnika jednaka je $P = 2rd$. No, onda je, prema *prvom Cavalierijevu načelu* tomu jednaka i površina lika čiju površinu tražimo. Zbog čega? Presječemo li lik L i pravokutnik bilo kojim pravcem paralelnim pravcu AB, duljine odsječaka tog pravca unutar lika L i pravokutnika bit će uvijek iste. Ovaj lijep i jednostavan primjer zorno ilustrira Cavalierijeve ideje.

Primjer 2. Promotrimo sljedeću konstrukciju: Nacrtajmo kružnicu promjera $2r$. Neka je $\overline{AB}$ neki promjer ove kružnice. Pravac p okomit na $\overline{AB}$ siječe kružnicu u točkama C i D, a dužinu $\overline{AB}$ siječe u točki P. Od točke C ulijevo i od točke D udesno odredimo na pravcu p točke E i F tako da je $|CE| = |DF| = |BP|$. Provedemo li opisani postupak za sve pravce paralelne pravcu p, dobit ćemo krivulju u obliku gljive.



Slika 2.

Ako je zadan r, kolika je površina dijela ravnine koji je omeđen ovom krivuljom?

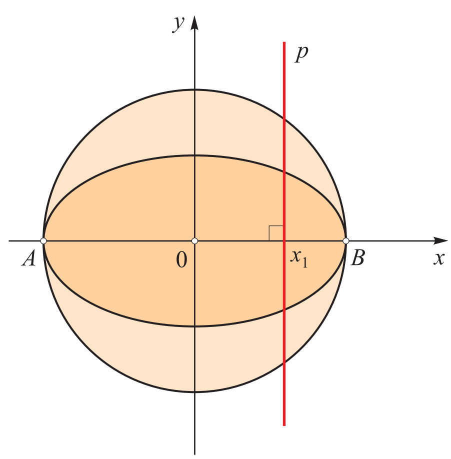
Kako bismo riješili taj zadatak, konstruirat ćemo jednostavniji lik složen od nedjeljivih koje su sukladne ovima od kojih je satkana gljiva. Umjesto da dužinu $\overline{BP}$ nanosimo po pravcu p od kružnice ulijevo i udesno, nanesimo je ulijevo i udesno od točke P. Tako ćemo dobiti pravokutni trokut ΔMNB čija je površina jednaka površini gljive bez površine kruga i iznosi $4r^2$.

Površina gljive jednaka je onda:

$$P = 4r^2 + r^2\pi = r^2(\pi + 4).$$

Primjer 3. Kolika je površina elipse s osima duljine $2a$ i $2b$?

Elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ opišimo kružnicu $x^2 + y^2 = a^2$. Povucimo pravac $x = x_1$ paralelan s osi y. Taj pravac siječe kružnicu i elipsu te su odgovarajući segmenti $2y_1 = 2\sqrt{a^2 - x_1^2}$ (u kružnici) te $2y_2 = 2\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$ (u elipsi).



Slika 3.

Omjer $\frac{2y_1}{2y_2} = \frac{a}{b}$ očigledno je neovisan o tome gdje je presjek proveden, uvijek će omjer dviju tetiva, one unutar kružnice i one unutar elipse biti jednak i iznosit će $a : b$. Time su ispunjeni uvjeti *prvog Cavalierijeva načela* pa su u istom omjeru i površine dijelova ravnine omeđenih kružnicom i elipsom. Površina kruga jednaka je $P_k = a^2\pi$ pa iz razmjera $P_k : P_e = a : b$ nalazimo $P_e = ab\pi$.