Dedukcija

Zdravko Kurnik, Zagreb

Među načinima zaključivanja i metodama znanstvene spoznaje posebno mjesto zauzimaju **indukcija** i njezina suprotnost **dedukcija**. To posebno vrijedi za matematiku. Razlog je jednostavan: matematika je *deduktivna znanost*, a matematika u nastajanju je eksperimentalna *induktivna znanost*. Same metode razlikuju se po ciljevima. Cilj indukcije je opće, a cilj dedukcije je pojedinačno i posebno.

Pojam dedukcije

Preciznije možemo reći:
Dedukcija je oblik zaključivanja pri kojemu se od jednog općeg suda i jednog posebnog ili pojedinačnog suda dobiva novi, manje općenit, poseban ili pojedinačan sud.

Riječ dedukcija potječe od riječi *deductio* što znači *izvođenje*.

Deduktivno zaključivanje ima tri oblika:

a) Zaključivanje od općenite tvrdnje na manje općenitu ili pojedinačnu tvrdnju.

Primjer: Ako su a i b relativno prosti brojevi, onda je najveći zajednički djelitelj tih brojeva 1, tj. vrijedi

$D(a, b) = 1$ (opća tvrdnja).

$D(29, 2009) = 1$ (pojedinačna tvrdnja).

Iz ovih dvaju sudova izvodi se pojedinačna tvrdnja: 29 i 2009 su relativno prosti brojevi.

b) Zaključivanje od pojedinačnog ka posebnom.

Primjer: Broj 2 je prost broj (pojedinačna tvrdnja).

Broj 2 je prirodan broj (pojedinačna tvrdnja).

Neki prirodni brojevi su prosti brojevi (posebna tvrdnja).

c) Zaključivanje od opće tvrdnje ka općoj tvrdnji.

Primjer: Svi parni brojevi djeljivi su s 2 (opća tvrdnja).

Nijedan neparni broj nije djeljiv s 2 (opća tvrdnja).

Nijedan parni broj nije istovremeno i neparan broj (opća tvrdnja).

* * *

Dedukcija u matematici strogo je logički zasnovana metoda dokazivanja. U današnje vrijeme ta se metoda dokazivanja zasniva na nekom sustavu aksioma. Zato se deduktivna metoda naziva još i *aksiomatska metoda*.

Kao metoda istraživanja dedukcija je karakterizirana nalaženjem klase objekata koji su srodni promatranom objektu i primjenom bitnih svojstava te klase objekata.

Dedukcija dolazi i kao poseban oblik izlaganja matematičkih sadržaja u udžbeniku i kao jedna od nastavnih metoda.

Svaka dedukcija uključuje u sebi element indukcije. Primjer dedukcije je *matematička indukcija*. Naziv je pomalo paradoksalan, ali znamo da se metoda matematičke indukcije zasniva na jednom aksiomu!

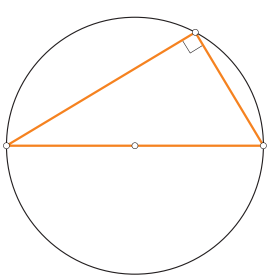
Mali povijesni pregled

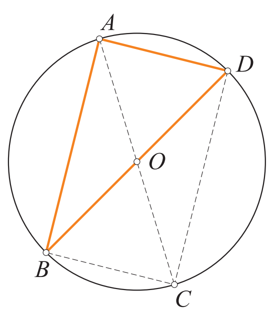
Već su se stari Babilonci i Egipćani u rješavanju matematičkih problema koristili zaključivanjem. Otkrili su mnoštvo činjenica, ali u tome mnoštvu nisu tražili uzročne veze. Tek su stari Grci, preuzimajući njihova znanja, pokušali u to mnoštvo matematičkih činjenica unijeti red. Za tu svrhu uveli su niz posebnih postupaka kao što su analiza, sinteza, analogija, apstrakcija, generalizacija i dedukcija. Velika je zasluga starih Grka baš u tome što su primjenom tih metoda matematiku razvili kao znanost.

Tales. Prvi matematičar koji je u matematiku uveo apstraktno mišljenje i dokaz bio je TALES (oko 624. – oko 548. pr. Kr.). On svoj poznati poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice dokazuje s pomoću sljedeće matematičke tvrdnje:

Četverokut kojemu su dijagonale jednake duljine i koje se raspolavljaju nužno je pravokutnik.

Možete li na temelju donjih slika rekonstruirati Talesov dokaz?

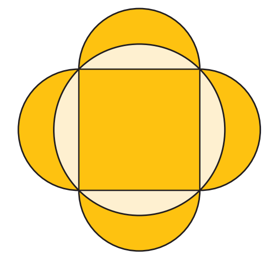




Na taj način je Tales, dokazivanjem jedne matematičke tvrdnje drugom tvrdnjom, ne samo začetnik postupka dokazivanja, već je na pragu i *deduktivne metode* u matematici. Međutim, njegov dokaz još nije logički strog. Pomoćna tvrdnja nije dokazana!

Hipokrat. Važan napredak u izgradnji deduktivnog sustava učinio je HIPOKRAT (djelovao u drugoj polovici V. stoljeća pr.Kr). Autor je prvog djela iz planimetrije u kojemu je uspostavljen takav sustav, ali koje nije sačuvano. Probleme je rješavao svodeći ih na jednostavnije probleme, koje je već dokazao ili koje je smatrao istinitima. Time je zaslužio da ga se smatra osnivačem deduktivne metode.

Proučavao je kvadraturu kruga. Kao poseban rezultat dobio je da je zbroj površina četiriju mjeseca nad stranicama kvadrata upisanog u krug jednak površini kvadrata (*Hipokratove lunule*).



Euklid. Do III. stoljeća pr. Kr. grčki matematičari skupili su veliko znanje i razvili djelotvorne istraživačke metode. Zato je bio sasvim prirodan pokušaj da se dotadašnja matematika sistematizira i cijela ili neke njezine teorije potpunije zasnuju na određenom broju jednostavnih istina, polaznih tvrdnji, koje se pretpostavljaju kao točne i bez dokaza. To je učinio EUKLID (oko 330. – oko 275. pr. Kr.) oko 300. godine pr. Kr. u svom glasovitom djelu "Elementi" u 13 knjiga. I pored izvjesnih nedostataka ovo je djelo sjajno dostignuće antike. Više od 2000 godina ono je služilo kao uzor sustavnog izlaganja elementarne geometrije i sve do XIX. stoljeća bilo osnovni udžbenik iz kojeg se ona učila.

U "Elementima" aksiomi, definicije i poučci nižu se pravilno i primjereno, te čine savršen logički *deduktivni sustav*. Na početku "Elemenata" Euklid daje pregled nužnih definicija i polaznih tvrdnji geometrije, tvrdnji koje se smatraju istinitima i koje se ne dokazuju, podijeljenih u dvije skupine. Polazne tvrdnje prve skupine karakteriziraju opća svojstva veličina i nazivaju se *aksiomi*. Ima ih 9. Takve su na primjer tvrdnje:

Cjelina je veća od dijela.

Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.

Za svaka dva pozitivna realna broja a i b postoji takav prirodan broj n da je $na > b$ (Arhimedov aksiom).

Polazne tvrdnje druge skupine imaju čisto geometrijski karakter i nazivaju se *postulati*. Ima ih 5. Zatim se na temelju aksioma i postulata putem logičkog zaključivanja izvode i dokazuju teoremi i postupno izgrađuje cijela geometrija ravnine. Postulat obično izražava neki uvjet koji treba zadovoljavati neki pojam ili neki odnos među pojmovima.

Evo skupine od pet Euklidovih postulata:

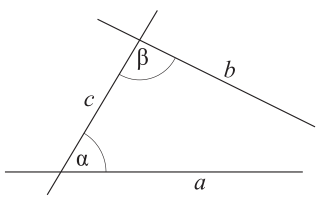
I) Od svake točke do svake točke može se povući pravac.

II) Ograničeni pravac može se neprekidno produživati po pravcu.

III) Iz svakog središta sa svakom udaljenošću može se opisati kružnica.

IV) Svi pravi kutovi međusobno su jednaki.

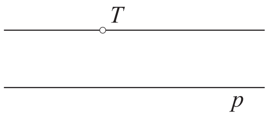
V) Ako pravac koji siječe dva druga pravca tvori s njima s iste strane unutarnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta dva pravca neograničeno produžena sastaju se s one strane na kojoj je taj zbroj manji od dva prava kuta.



Posebno značenje i važnost ima V. postulat, poznat u povijesti kao *Euklidov aksiom o paralelama*. Zapravo, on govori o tome uz koji uvjet dva pravca a i b jedne ravnine nisu paralelna. Taj je uvjet dan nejednakošću $\alpha + \beta < \pi$ i uz taj uvjet pravci se sijeku. Ako je $\alpha + \beta = \pi$, tada se pokazuje da se pravci a i b ne sijeku, tj. oni su paralelni.

U našim udžbenicima V. postulat iskazuje se i primjenjuje u sljedećem ekvivalentnom i jednostavnijem obliku:

Točkom izvan pravca može se povući točno jedan pravac paralelan s tim pravcem.



S pomoću V. postulata dokazuju se mnogi teoremi elementarne geometrije. Među njima su i tvrdnje koje su mu ekvivalentne. Osim gornjeg, evo još nekih ekvivalenata V. postulata:

U ravnini postoji bar jedan pravokutnik, tj. četverokut s četiri prava kuta.

Zbroj kutova u trokutu jednak je dva prava kuta.

Postoje dva slična a nesukladna trokuta.

Za svake tri točke koje ne leže na jednom pravcu postoji jedinstvena kružnica koja prolazi tim točkama.

Lobačevski, Bolyai, Gauss. Sve do XIX. stoljeća nitko nije sumnjao u to da su svi Euklidovi postulati apsolutne i postojane istine i da je euklidska geometrija jedini geometrijski sustav. Da euklidska geometrija nije jedini geometrijski sustav otkrio je javnosti 23. veljače 1826. godine ruski matematičar NIKOLAJ IVANOVIČ LOBAČEVSKI (1792.–1856.) izloživši na zasjedanju Fizičko-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Kazanju svoj rad "Kratko izlaganje osnova geometrije sa strogim dokazom teorema o paralelnim pravcima". Taj dan smatra se danom rođenja novog geometrijskog sustava – *neeuklidske geometrije*. Što je Lobačevski učinio? Pitanje paralelnih pravaca on je razriješio na taj način da je Euklidov V. postulat zamijenio novim *aksiomom o paralelnim pravcima* koji glasi:

Točkom izvan pravca u ravnini prolaze dva pravca koja su paralelna s tim pravcem.

Na temelju ovog aksioma i ostalih aksioma Lobačevski izgrađuje novi geometrijski sustav koji je on nazvao *imaginarnom geometrijom*. Veliki njemački matematičar, fizičar i astronom CARL FRIEDRICH GAUSS (1777.–1856.) toj je geometriji dao naziv *neeuklidska geometrija*. Danas se ona još naziva *geometrija Lobačevskog* ili *hiperbolička geometrija*. Ravnina u kojoj se ostvaruje zahtjev Lobačevskog naziva se *ravnina Lobačevskog* ili *hiperbolička ravnina*.

Stvarajući novu geometriju Lobačevski je napravio prekretnicu u razvoju geometrije i izveo pravu revoluciju u matematičkom, pa i u cjelokupnom ljudskom mišljenju. Od stranih matematičara nove ideje mogli su u to vrijeme posve razumjeti i cijeniti samo Gauss i mađarski matematičar JANOS BOLYAI (1802.–1860.), jer su i sami došli na pomisao o postojanju neeuklidske geometrije. Gauss je osnovne ideje neeuklidske geometrije imao razrađene već 1824. godine, ali se zarekao da za života neće dopustiti njihovo objavljivanje, budući da "... većina ljudi nema uopće pravi osjećaj za to, o čemu se tu radi". Bolyai je do svojih rezultata došao 1825. godine, ali ih je objavio tek 1832. godine kao dodatak, "*Appendix*", udžbeniku elementarne i više matematike svoga oca Farkasa.

Peano. Aksiomatizacija aritmetike izgrađena je više od dva tisućljeća iza aksiomatizacije geometrije. To je 1891. godine učinio talijanski matematičar i logičar GIUSEPPE PEANO (1858.–1932.). *Peanovi aksiomi* prirodnih brojeva služe za definiciju prirodnog broja. Njegov *deduktivni sustav* aritmetike temelji se na trima osnovnim pojmovima: prirodnom broju, prirodnom broju 1 i sljedbeniku.

Prirodnim brojevima nazivaju se elementi svakoga nepraznog skupa $\mathbf{N}$ u kojemu postoji relacija *slijedi za* koja zadovoljava sljedeće aksiome:

(P1) 1 *je prirodan broj.*

(P2) *Sljedbenik svakoga prirodnog broja je prirodan broj.*

(P3) *Nikoja dva prirodna broja nemaju istog sljedbenika.*

(P4) 1 *nije sljedbenik nijednog prirodnog broja.*

(P5) *Neka je M bilo koji podskup skupa prirodnih brojeva koji ima svojstvo da mu pripada broj 1 i sljedbenik svakog njegova elementa. Tada je $M = \mathbf{N}$.*

Ova svojstva prirodnih brojeva uistinu su jednostavna i očita. Sva teorija prirodnih brojeva proizlazi iz gornjih pet aksioma. Posebnu ulogu ima aksiom (P5). On je nešto složeniji i koristi se u dvije svrhe: dokazivanje teorema i rekurzivno definiranje funkcija sa skupa $\mathbf{N}$ u neki neprazni skup. Danas se taj aksiom naziva *aksiom matematičke indukcije*.

Aksiomatizacije skupova brojeva. Sve aksiomatizacije skupova brojeva, prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih, provedene su u drugoj polovici 19. stoljeća. Veliki doprinos tim nastojanjima dali su znameniti njemački matematičari HERMANN GRASSMANN (1809.–1877.), KARL WEIERSTRASS (1815.–1897.), WILHELM DEDEKIND (1831.–1916.) i GEORG CANTOR (1845.–1918.).

Aksiomi opisani u prethodnoj točki dobili su ime po Peanu, ali iste aksiome našao je već Dedekind 1888. godine proučavajući cijele brojeve. Dedekind je jedan od prvih matematičara koji je dao teoretsko-skupovno zasnivanje teorije realnih brojeva.

Peano se pri izgradnji svog deduktivnog sustava aritmetike koristio još i Grassmannovim rezultatima o cijelim brojevima iz 1861. godine. Do pojave Grassmannovih radova matematička indukcija razmatrala se samo kao metoda dokazivanja.

Cantor je Weierstrassov učenik i osnivač teorije skupova. U početku se bavi metodama svoga učitelja u teoriji realnih brojeva. Razvio je jednu od teorija iracionalnih brojeva.

Dedukcija u nastavi matematike

Činjenica da je matematika *deduktivna znanost* sve govori. Aksiomi i osnovni pojmovi čine temelj neke matematičke teorije. Ali ne samo oni. Naime, izgradnja neke matematičke teorije ima sljedeće četiri etape:

1) Navođenje osnovnih pojmova.
2) Formuliranje aksioma.
3) Definiranje novih pojmova.
4) Izvođenje i dokazivanje teorema.

Vidimo da su za izgradnju važne i izjave koje se logičkim rasuđivanjem izvode iz aksioma i definicija – poučci ili teoremi. Teoremi proširuju i produbljuju naše znanje o nekom području matematike i njegovim objektima. Teorem je glavni predmet naših razmatranja.

Što se tiče nastave matematike, postoje određena odstupanja. Već smo ranije naglasili da je nastava matematike u nižim razredima osnovne škole pretežno induktivna. Više se koriste konkretni i očigledni dokazi, koji ne dokazuju toliko, koliko uvjeravaju u istinitost tvrdnji. Dedukcija i deduktivni način mišljenja i dokazivanja provode se poslije konkretizacije i indukcije na višoj razini nastave matematike i obrazovanja učenika, gdje se dedukcija oblikuje u poseban način izlaganja matematičkih sadržaja kako u udžbenicima, tako i u nastavnom procesu.

Međutim, iako je matematika deduktivna znanost, školska matematika ne izgrađuje se ni na jednoj razini nastave kao strog deduktivni sustav, već ostaje u okvirima modela. Ovo pogotovo vrijedi za nastavu matematike u osnovnoj školi. Mnogi poučci obrađuju se u njoj bez dokaza.

Što je zapravo dokaz teorema? O dokazu u strogom smislu pri izgradnji određene matematičke teorije (aritmetike, planimetrije, stereometrije, teorije vjerojatnosti ili dr.) može se govoriti samo u okvirima nekog sustava aksioma. Dokaz teorema u nekoj teoriji je konačan niz tvrdnji teorije u kojemu je svaka tvrdnja ili aksiom, ili je dobivena iz prethodno dokazanih tvrdnji toga niza po nekom pravilu logičkog zaključivanja. Posljednja tvrdnja u tome nizu sama je tvrdnja teorema. Dokazana tvrdnja nakon toga postaje sastavni dio svakog daljnjeg postupka dokazivanja.

Rečeno o deduktivnom načinu dokazivanja ne znači da se u školskoj matematici aksiomi ne upotrebljavaju. Oni imaju u nastavnom procesu važnu ulogu, ali se upotrebljavaju samo onoliko, koliko je potrebno da nastava matematike bude u skladu s načelom znanstvenosti i primjerena uzrastu i matematičkim sposobnostima učenika. Sam naziv aksiom rijetko se izrijekom navodi, odnosno navodi se samo na višoj razini matematičkog obrazovanja.

U ovom odjeljku ilustrirat ćemo opisani način mišljenja i zaključivanja u nekoliko karakterističnih primjera.

Aksiomi racionalnih brojeva. U izučavanju elementarne algebre nekoliko se puta javlja potreba za proširivanjem područja brojeva.

a) Najprije se izučava skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$. U prethodnim razmatranjima upoznali smo aksiome prirodnih brojeva i naglasili da sva njihova teorija proizlazi iz tih pet aksioma. U nastavi matematike učenici vrlo rano uče sljedeća osnovna svojstva dviju operacija definiranih u skupu prirodnih brojeva, zbrajanja i množenja:

$(x+y)+z=x+(y+z)$
(asocijativnost zbrajanja);

$x+y=y+x$
(komutativnost zbrajanja);

$(x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z)$
(asocijativnost množenja);

$x \cdot y=y \cdot x$
(komutativnost množenja);

$x \cdot 1=1 \cdot x=x$
(postojanje jedinice);

$(x+y) \cdot z=x \cdot z+y \cdot z$
(distributivnost množenja prema zbrajanju).

U skupu prirodnih brojeva jednadžba:

$$a+x=b, \qquad a, b \in \mathbf{N}$$

ima rješenje samo za $a<b$. To je rješenje razlika $b-a$ prirodnih brojeva b i a. Za $a>b$ oduzimanje nije izvedivo u $\mathbf{N}$.

b) Zbog navedenog razloga skup $\mathbf{N}$ proširuje se s nulom 0 i negativnim brojevima $-1, -2, -3, \dots$ i dobiva skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

U skupu $\mathbf{Z}$ uvijek je $x=b-a$ rješenje promatrane jednadžbe. Primijetimo da ista jednadžba ima rješenje u dobivenom proširenju $\mathbf{Z}$ i za $a, b \in \mathbf{Z}$. U skupu $\mathbf{Z}$ operacije zbrajanja i množenja imaju ista svojstva kao i u skupu $\mathbf{N}$, ali i dva nova: $x+0=0+x=x$ (postojanje nule) i $x+(-x)=(-x)+x=0$ (postojanje suprotnog broja).

c) Jedna od motivacija potrebe za proširivanjem skupa $\mathbf{Z}$ zahtjev je da jednadžba:

$$ax=b, \quad a, b \in \mathbf{Z}, a \neq 0$$

ima rješenje u nekom skupu brojeva. Taj zahtjev ostvaruje se u skupu racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}=\{\tfrac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}\}.$$

U skupu $\mathbf{Q}$ uvijek je $x=\frac{b}{a}$ rješenje jednadžbe. Primijetimo da ista jednadžba ima rješenje u dobivenom proširenju $\mathbf{Q}$ i za $a, b \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$. Kako se aksiomatiziraju racionalni brojevi? U skupu $\mathbf{Q}$ operacije zbrajanja i množenja imaju niz očiglednih svojstava. Ta svojstva uzimamo za aksiome racionalnih brojeva. Evo te grupe aksioma:

$(x+y)+z=x+(y+z)$
(asocijativnost zbrajanja);

$x+0=0+x=x$
(postojanje nule);

$x+(-x)=(-x)+x=0$
(postojanje suprotnog broja);

$x+y=y+x$
(komutativnost zbrajanja);

$(x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z)$
(asocijativnost množenja);

$x \cdot 1=1 \cdot x=x$
(postojanje jedinice);

$x \cdot x^{-1}=x^{-1} \cdot x=1, \ x \neq 0$
(postojanje recipročnog broja);

$x \cdot y=y \cdot x$
(komutativnost množenja);

$(x+y) \cdot z=x \cdot z+y \cdot z$
(distributivnost množenja prema zbrajanju).

Grupi treba dodati još sljedeća osnovna svojstva relacije uređaja $\leq$:

$x \leq x$

$x \leq y$ i $y \leq x \Rightarrow x=y$

$x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$x \leq y$ ili $y \leq x$

$x \leq y$ i $x+z \leq y+z$

$0 \leq x$ i $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy.$

Sve ove činjenice o racionalnim brojevima učenici dobro poznaju i neke od njih svakodnevno koriste pri proučavanju i učenju matematike. A u popisu su osnovna svojstva racionalnih brojeva na temelju kojih se izgrađuje cijeli skup.

Aksiomi realnih brojeva. Skupove prirodnih, cijelih i racionalnih brojeva dobro upoznaju već učenici osnovne škole. Učenici završnog razreda imaju i neku ne baš potpuno jasnu predodžbu o realnim brojevima jer se putem korjenovanja susreću s iracionalnim brojevima. Tu je i broj π koji je neizbježan kad su u pitanju opseg kružnice i površina kruga.

U srednjoj školi učenici upoznaju nova svojstva realnih brojeva, njihovo znanje o realnim brojevima povećava se, ali još uvijek više na intuitivnoj razini. Tek krajem školovanja postavlja se pitanje kako treba realne brojeve strogo matematički zasnovati.

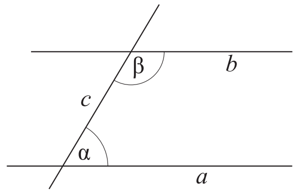
Zapravo to i nije preteško pitanje. Dovoljno je napomenuti da operacije zbrajanja i množenja i relacija $\leq$ u skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$ imaju ista svojstva kao u skupu racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$.

Da bi izgradnja skupa $\mathbf{R}$ bila potpuna, potrebno je još samo dodati *aksiom potpunosti*.

Kad bismo se htjeli malo našaliti u vezi sa znanjem učenika o aksiomima realnih brojeva, rekli bismo da "učenici ne znaju da znaju!"

Presječnica paralelnih pravaca. Ovaj matematički pojam učenici upoznaju i primjenjuju dosta rano. Podsjetimo se. Neka su a i b paralelni pravci, a c njihova presječnica.

Presječnica c s pravcima a i b zatvara ukupno 8 kutova. Neki su od tih kutova vršni, neki suplementni. Na slici smo istaknuli ona dva kuta koji su u uskoj vezi s jednim već razmatranim aksiomom. Naime, za kutove α i β znamo da vrijedi očigledna i jednostavna jednakost:



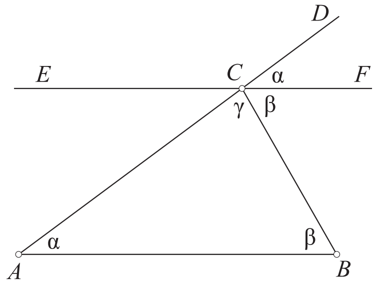
$$\alpha + \beta = 180°,$$

koja se ne dokazuje jer je ta činjenica samo drukčiji iskaz Euklidova V. postulata. Sve ostale veze među kutovima uz presječnicu posljedice su te jednakosti. Pri razmatranju presječnice dvaju paralelnih pravaca u nastavi treba krenuti od te činjenice.

Zbroj kutova u trokutu. Poučak: *Zbroj unutarnjih kutova u svakome trokutu jednak je* $180°$.

Pogledajmo koje činjenice trebamo za opravdanje tvrdnje.

1) Stranicu $\overline{AC}$ produžimo do polupravca $\overline{AD}$ (produživanje omogućuje Euklidov II. postulat).
2) Vrhom C trokuta ABC povlačimo paralelu EF s pravcem AB (povlačenje ove paralele omogućuje nam aksiom o paralelama euklidske geometrije koji kaže da se točkom izvan danog pravca može povući jedinstven pravac paralelan s danim pravcem).
3) Kutovi s paralelnim kracima jednaki su ili zajedno daju $180°$ (ranije dokazana tvrdnja).



Sada uočavamo da kutovi $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle FCD$, odnosno $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle BCF$ imaju paralelne krakove. Dakle, vrijedi:

$$\sphericalangle FCD = \sphericalangle BAC = \alpha, \quad \sphericalangle BCF = \sphericalangle CBA = \beta.$$

Kutovi $\sphericalangle FCD$, $\sphericalangle BCF$ i $\sphericalangle ACB$ zajedno tvore ispruženi kut, pa je konačno:

$$\sphericalangle FCD + \sphericalangle BCF + \sphericalangle ACB = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Linearna jednadžba. Opći oblik linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom je $ax = b$. U ovoj točki opisat ćemo primjenu aksioma realnih brojeva pri rješavanju jednog posebnog oblika linearne jednadžbe, $a + x = b$.

Poučak: *Jednadžba $a + x = b$ u skupu realnih brojeva ima jedinstveno rješenje.*

Koraci dokaza:

$-a + (a + x) = -a + b$
(aksiom o dodavanju jednakim stvarima jednakog);

$(-a + a) + x = -a + b$
(aksiom o asocijativnosti zbrajanja);

$0 + x = -a + b$
(aksiom o suprotnom elementu);

$x = -a + b$
(aksiom o nuli);

$x = b + (-a)$
(aksiom o komutativnosti zbrajanja).

Provjera pokazuje da je $x = -a + b$ uistinu rješenje polazne jednadžbe. Naravno, u školskoj praksi dokaz se pojednostavnjuje i skraćuje.

Aksiomi prostora. Osnovni elementi prostora su točke, pravci i ravnine. Geometriju prostora, stereometriju može se također izgraditi logičkim zaključivanjem, polazeći od malog broja osnovnih pojmova i osnovnih činjenica, aksioma.

Ako se pretpostavi da u svakoj ravnini prostora vrijede odnosi geometrije ravnine, tada je za izgradnju stereometrije dovoljno da međusobni odnosi točaka, pravaca i ravnina imaju još ova tri osnovna svojstva:

(A1) *Ako su dane tri točke, onda postoji bar jedna ravnina koja sadržava te točke.*

(A2) *Ako ravnina sadržava dvije različite točke pravca, onda ona sadržava taj pravac.*

(A3) *Ako su* α *i* β *dvije različite ravnine, onda je njihov presjek* $\alpha \cap \beta$ *ili prazan skup ili pravac.*

Da bi se mogla istraživati metrička svojstva prostora, ovaj skup aksioma treba dopuniti *aksiomom udaljenosti*.

U stereometriji vrijede mnogi poučci. Za razliku od poučaka u planimetriji, u kojoj crteži vjerno predočuju odnose među točkama i pravcima, u stereometriji zornost pri dokazivanju često ne pomaže. Velik broj poučaka dokazuju se indirektno.

1) Kao primjer navest ćemo indirektni dokaz jednog takvog poučka koji je neposredna posljedica aksioma.

Ako su A, B, C tri točke prostora koje ne pripadaju istom pravcu, onda postoji jedinstvena ravnina koja sadržava te točke.

Dokaz. Formulacija poučka je primjerena, jer se jasno vidi što je pretpostavka, a što tvrdnja.

Prema prvom aksiomu stereometrije (A1) postoji bar jedna ravnina π koja sadržava točke A, B, C.

Neka je φ bilo koja ravnina koja sadržava točke A, B, C. Tvrdimo da je nužno $\varphi = \pi$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi: $\varphi \neq \pi$.

Kako je $A \in \pi$, $A \in \varphi$, to presjek $\varphi \cap \pi$ nije prazan skup, pa prema trećem aksiomu stereometrije (A3) proizlazi da je taj presjek pravac.

Međutim, točke A, B, C pripadaju i jednoj i drugoj ravnini, što znači da pripadaju tom pravcu. To je suprotnost pretpostavci da točke A, B, C ne pripadaju jednom pravcu. Zato suprotna tvrdnja nije istinita, vrijedi polazna tvrdnja.

Iako je izreka (A1) općenitija i pogodnija za aksiom, često se u udžbenicima umjesto nje kao aksiom uzima izreka iz ovog primjera.

2) Slijedi poučak za čiji je dokaz već potrebno znanje upravo dokazanog poučka.

Ako je A točka prostora i a pravac koji ne sadržava A, tada postoji jedna i samo jedna ravnina koja sadržava točku A i pravac a.

Dokaz. Odaberimo bilo koje dvije različite točke B i C pravca a. Točke A, B, C ne pripadaju istom pravcu, pa prema prethodnom poučku postoji jedna i samo jedna ravnina π koja sadržava te točke. Iz $B, C \in a$ i $B, C \in \pi$ prema aksiomu (A2) slijedi odmah $a \subset \pi$.

Treba još dokazati jedinstvenost ravnine. Neka je φ bilo koja ravnina koja sadržava točku A i pravac a. Tada iz $B, C \in a$ i $a \subset \varphi$ slijedi $B, C \in \varphi$, što zajedno s $A \in \varphi$ ima za posljedicu $\varphi = \pi$.

***

U nastavi matematike na sličan se način vrši izlaganje matematičkih sadržaja i dokazuju i drugi poučci, a da se pritom nigdje ne spominju aksiomi. Važno je samo da se sve odvija u duhu deduktivne metode!

LITERATURA

[1] Ž. Dadić, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Zagreb, Školska knjiga, 1992.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4*, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, Element, Zagreb, 2006.

[3] I. Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb, 1995.

[4] Z. Kurnik, *Indukcija*, Matematika i škola 5 (2000.), 197-203.

[5] Z. Kurnik, *175 godina od otkrića neeuklidske geometrije*, Matematika i škola 8 (2001.), 129-132.

[6] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Vol. 1: Induction and Analogy in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, 1954.