Arhimedov problem stoke

Branimir Dakić, Zagreb

U glavi Arhimedovoj bilo je više mašte negoli u Homerovoj.

Voltaire

Ako si marljiv i mudar, stranče, izračunaj broj Sunčevih goveda što su nekoć pasla na poljima Trinakije na otoku Siciliji, podijeljenih u četiri stada različitih boja: jednog bijelog kao snijeg, drugog blještavo crnog, trećeg žutog i četvrtog šarenog.

U svakom je stadu bilo mnoštvo bikova:

Broj bijelih bio je jednak zbroju polovine i trećine crnih i još k tome valja dodati sve žute.

Broj crnih dobije se kad četvrtini i petini šarenih pridodamo i opet sve žute.

Znaj da je šarenih bilo koliko je zbroj šestine bijelih i njihove sedmine, a i ovima valja pridodati sve žute.

A evo koliko krava bijaše:

Bijelih je bilo točno onoliko koliko iznosi trećina i četvrtina cjelokupnog krda crnih.

Broj crnih bio je jednak zbroju četvrtine i petine sve šarene stoke.

Šarenih je krava bilo onoliko koliki je zbroj petine i šestine sve žute stoke u stadu.

Naposljetku, žute su krave po broju bile jednake zbroju šestine i sedmine bijeloga krda.

Mogneš li, stranče, točno reći broj Sunčevih goveda, utvrdivši ponaosob broj gojnih bikova i k tome broj krava prema njihovoj boji, neću te držati nevježom i neznalicom po pitanju brojeva, no još uvijek te neću ubrojiti niti među mudre.

No, hajde razmisli još i o ovim uvjetima koji se odnose na Sunčeva goveda:

Kad se bijeli volovi izmiješaju s crnima te rasporede tako da u širinu stane jednako kao u dubinu, ispunit će se dolina Trinakije njihovim mnoštvom.

A ako se žuti i šareni bikovi skupe u jedno krdo tako da među njima ne bude nijednog vola druge boje niti ijedan od žutih ili šarenih ne uzmanjka, oni će se moći rasporediti tako da im broj po redovima raste, počev od broja jedan, te se tako napuni triangularni broj.

Uzmogneš li, stranče, riješiti sve ovo, završit ćeš okrunjen slavom i smatrat će te nenadmašnim u mudrosti.

Ovaj problem poznat je kao **Arhimedov problem stoke**. Napisan je u formi epigrama u 44 retka, a ovdje je dan njegov slobodan prijevod.

Epigram je kratka pjesnička forma, obično pisana u elegijskom distihu. Izrazito je prisutna u starogrčkoj književnosti. Rabljena je i kao javna ili prigodna poruka (čestitka, poslanica, iskaz sućuti, molba). No oblik epigrama imale su i rugalice bilo nekim osobama, bilo zbivanjima u piščevoj okolini. Tako je i ovaj Arhimedov epigram nastao kao svojevrstan njegov odgovor na zanovijetanja Apolonija iz Perga (262.–190. g. pr. Kr.) koji je Arhimedu predbacivao da je sklon matematičkim problemima čije rješavanje zahtijeva naporna i dugotrajna računanja.

Arhimed je osmislio numerički uistinu zahtjevan problem, te ga uputio Eratostenu iz Kirene (275.–195. g. pr. Kr.). Inspiraciju je vrlo vjerojatno pronašao u Homerovoj *Odiseji*.[1)] U hrvatskom prijevodu Tome Maretića [5] u popratnim komentarima "Što je u kojem pjevanju" o XII. pjevanju Maretić piše:

Došavši on natrag do Kirke sahrani tijelo Elpenorovo, a Kirka mu veli što ga čeka na putu i kako će se moći tome ukloniti. Slušajući njezin savjet prođe sretno pokraj Sirena, ali kad dođe do Skile i Haribde, šestoricu mu drugova proguta Skila. Drugovi ga zatim nagnaju da krene lađom prema trinačkome otoku, gdje je bog Helije imao svoja goveda i ovce. Vjetrovi im ne dadoše dugo ostaviti taj otok, i kad drugovima nestane hrane, oni zakolju nekoliko Helijevih goveda, premda im je Odisej bio rekao da to nipošto ne čine. Helije tuži Zeusu drugove Odisejeve, a Zeus ih, kad već otplove od Trinakije, smrću kazni na moru; svi se podave u vodi, samo Odisej na dvije grede lađene doplovi nekako, ali tek za devet dana, do Kalipsina otoka Ogigije.

U "Tumaču riječi i imena" istog Maretićeva prijevoda kaže se:

Trinakija je nekakav otok, po kojem pasu goveda sunčeva. Poslije su mislili da je to Trinakrija, tj. Sicilija.

Dodajmo, Trinakija, izvorno Θρινακια na grčkom bi značilo *nešto s tri kuta – trokutasto,* pa se najvjerojatnije u tome i skriva razlog ovom tumačenju. "Sunčeva stoka" pripadala je bogu Heliosu i prema starogrčkom vjerovanju napasala se u blizini Taormine, oko 85 km od Sirakuze. Naseljenici su ime Tauromenion (ταυομενιον) izveli iz riječi tauros (ταυρος) – bik.

Inače, sam problem pojavio se 1773. godine u prijevodu njemačkog pisca Gottholda Ephraima Lessinga (1729.–1781.). Lessing je bio knjižničar u poznatoj Herzogovoj biblioteci u Wolfenbüttelu. Biblioteka je sadržavala brojne rukopise i djela pisana na grčkom i latinskom jeziku i on je, proučavajući i prevodeći neke od njih, naišao i na **problem stoke**.

1) V. [5], pjevanje XII., redci 383.–389. i 194.–198.

Opće rješenje problema dao je 1880. godine njemački matematičar A. Amthor [1] koji je pokazao da je rezultat približno jednak $7.76 \cdot 10^{206\,544}$, što je broj s 206 545 znamenki i da su prve četiri njegove znamenke 7760.

Jedna neformalna skupina pod nazivom The Hillsboro Mathematical Club koju su činili matematičari E. Fish, G. H. Richards i A. H. Bell u godinama 1889. do 1893. izračunali su prvu 31 i posljednjih 12 znamenki najmanjeg rješenja problema. Rezultat je objavljen u časopisu *American Mathematical Monthly*[2)].

7760271406486818269530232833209 ...
... 719455081800

Koliko je računanje u vrijeme prije pojave kompjutora bilo složeno, nazire se iz teksta objavljenog u *The New York Timesu* 18. siječnja 1931.: *Budući da bi izračun zahtijevao tisuću ljudi i tisuću godina, jasno je da svijet nikad neće dočekati cjelokupno rješenje* (misli se na rješenje problema stoke). I kao što bi se reklo, nikad ne reci nikad, točan broj, sve njegove znamenke, odredili su 1965. matematičari H. C. Williams, R. A. German i C. R. Zarnke, s kanadskog Sveučilišta Waterloo primjenom računala IBM 7040. Stroju je za izračun trebalo 7 sati i 49 minuta.[3)]

Provjeru tog rezultata proveo je 16 godina kasnije Harry L. Nelson na glasovitom računalu Cray-1, a broj s 206 545 znamenki ispisan je na 47 listova papira. Račun je, zajedno s provjerom točnosti, trajao desetak minuta, a bila je riječ zapravo o testiranju novoproizvedenog računalnog čuda. Rezultat je objavljen u sitnom fontu u časopisu *Journal of Recreational Mathematics*[4)]. Nelson je uz najmanje "izvukao" i pet sljedećih rješenja od kojih je posljednje imalo više od milijun znamenki.

Vratit ćemo se kasnije još nekim zanimljivostima, a sada se prihvatimo rješavanja samoga problema.

Zamislimo, dakle, stado koje se sastoji od krava i bikova bijele, crne ili žute boje, a neki su i šareni. Brojevi pojedine podskupine međusobno su po-

2) A. H. Bell, *The Cattle Problem*, American Mathematical Monthly, Vol 2 (1895).
3) H. C. Williams, R. A. German i C. R. Zarnke, *Solution of the cattle problem of Archimedes*, Mathematics of Computation, Vol. XIX (1965).
4) Harry L. Nelson, *A solution to Archimedes cattle problem*, Journal of Recreational Mathematics, 13 (1980–81).

vezani izvjesnim jednostavnim uvjetima. Za njihov zapis uvedimo sljedeće oznake:

B – broj bijelih bikova,

b – broj bijelih krava,

C – broj crnih bikova,

c – broj crnih krava,

Z – broj žutih bikova,

z – broj žutih krava,

S – broj šarenih bikova,

s – broj šarenih krava.

Sljedeći sustav jednadžbi jasno nam opisuje uvjete koji se ističu u problemu:

(1) $B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot C + Z,$

(2) $C = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot S + Z,$

(3) $S = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot B + Z,$

(4) $b = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot (C + c)\,,$

(5) $c = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot (S + s)\,,$

(6) $s = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot (Z + z)\,,$

(7) $z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot (B + b).$

I još su postavljena dva uvjeta:

(8) $B + C$ je potpuni kvadrat,

(9) $D + S$ je broj oblika $\frac{n\,(n+1)}{2}$ (trokutni broj).

Sedam jednadžbi čine homogeni linearni sustav s osam nepoznanica i danas i nije neki veći problem riješiti ga nekim od računalnih programa kao što su primjerice *Mathematica*, *MatLab* ili *Maple*. No, nije neki problem riješiti sustav i "pješice".

Pomnožimo redom, prvu jednadžbu s 336, drugu s 280, treću s 126. Dobit ćemo:

$$336\,B = 280\,C + 336\,Z,$$

$$280\,C = 126\,S + 280\,Z,$$

$$126\,S = 39\,B + 126\,Z.$$

Zbrojimo sada ove tri jednadžbe i imamo

$$297\,B = 742\,Z,$$

odnosno $3^3 \cdot 11\,B = 2 \cdot 7 \cdot 53\,Z.$

Iz druge i treće jednadžbe potom nalazimo

$$3^4 \cdot 11\,S = 2^2 \cdot 5 \cdot 79\,Z,$$

odnosno $3^2 \cdot 11\,C = 2 \cdot 89\,Z.$

Analogno postupajući sa sljedećim četirima jednadžbama (prvu množimo s 4 800, drugu s 2 800, treću s 1 260 i četvrtu s 462), dobit ćemo:

$$3^3 \cdot 11 \cdot 4\,657\,b = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373\,Z,$$

$$3^2 \cdot 11 \cdot 4\,657\,z = 13 \cdot 46\,489\,Z,$$

$$3^3 \cdot 4\,657\,s = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 761\,Z,$$

$$3^2 \cdot 11 \cdot 4\,657\,c = 2 \cdot 17 \cdot 15\,991\,Z.$$

Kako rješenja moraju biti cijeli brojevi, zaključit ćemo promatrajući gornja rješenja da broj Z mora biti djeljiv s $3^4 \cdot 11 \cdot 4\,657$, odnosno možemo zapisati:

$$Z = 3^4 \cdot 11 \cdot 4\,657 \cdot k = 4\,149\,387 \cdot k.$$

Došli smo tako do općeg rješenja sustava sedam linearnih jednadžbi uz uvjet da su ta rješenja prirodni brojevi:

$$B = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4\,657\,k = 10\,366\,482 \cdot k,$$

$$C = 2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4\,657\,k = 7\,460\,514 \cdot k,$$

$$Z = 3^4 \cdot 11 \cdot 4\,657\,k = 4\,149\,387 \cdot k,$$

$$S = 2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4\,657\,k = 7\,358\,060 \cdot k,$$

$$b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373\,k = 7\,206\,360 \cdot k,$$

$$c = 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15\,991\,k = 4\,893\,246 \cdot k,$$

$$z = 3^2 \cdot 13 \cdot 46\,489\,k = 5\,439\,213 \cdot k,$$

$$s = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761\,k = 3\,515\,820 \cdot k,$$

pri čemu je k prirodni broj. Ukupno je to $50\,389\,082 \cdot k$ komada stoke.

Prvi od dvaju dodatnih uvjeta jest da broj $B + C$ bude potpuni kvadrat, tj. da je $B + C = m^2$, m je prirodan broj. Odnosno:

$$m^2 = 2 \cdot 3 \cdot (7 \cdot 53 + 3 \cdot 89) \cdot 4\,657 \cdot k$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657 \cdot k.$$

Očigledno, $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657 \cdot t^2$.

I tako sada imamo rješenje sustava što ga čini sedam jednadžbi uz dodatni uvjet da je $B + C$ potpuni kvadrat:

$$B = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 53 \cdot 4\,657^2\,t^2$$
$$= 46\,200\,808\,287\,018 \cdot t^2,$$

$$C = 2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \cdot 4\,657^2\,t^2$$
$$= 33\,240\,638\,308\,986 \cdot t^2,$$

$$Z = 3^5 \cdot 11^2 \cdot 29 \cdot 4\,657^2\, t^2 \\ = 18\,492\,776\,362\,863 \cdot t^2,$$

$$S = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 79 \cdot 4\,657^2\, t^2 \\ = 32\,793\,026\,546\,940 \cdot t^2,$$

$$b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 373 \cdot 4\,657\, t^2 \\ = 32\,116\,937\,723\,640 \cdot t^2,$$

$$c = 2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 4\,657 \cdot 15\,991\, t^2 \\ = 21\,807\,969\,217\,254 \cdot t^2,$$

$$z = 3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 4\,657 \cdot 46\,489\, t^2 \\ = 24\,241\,207\,098\,537 \cdot t^2,$$

$$s = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 29 \cdot 761 \cdot 4\,657\, t^2 \\ = 15\,669\,127\,269\,180 \cdot t^2.$$

U rješenju je t cijeli broj.

Posljednji uvjet zaoštrava pitanje konačnog rješenja. On zahtijeva da broj $D + S$ bude oblika:

$$\frac{n\,(n+1)}{2},$$

odnosno da bude **trokutni broj**.

$$4\,149\,387 \cdot k + 7\,358\,060 \cdot k = 11\,507\,447 \cdot k \\ = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Uz nađenu vrijednost za k tako imamo jednadžbu:

$$102\,571\,605\,819\,606\, t^2 = 2{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}353{\cdot}4\,657^2{\cdot}t^2 \\ = n\,(n+1).$$

I sada konačno valja još pronaći sva cjelobrojna rješenja ove jednadžbe. Iz nje upravo proistječe spomenuti Amthorov rezultat koji iskazuje najmanji mogući ukupan broj stoke.

Uvrstimo $2\,n + 1 = x$ i $4\,567\;t = y$, dobit ćemo jednadžbu:

$$x^2 - 4\,729\,494\, y^2 = 1.$$

U rješavanje ove jednadžbe, a to je ujedno i posljednji korak u rješavanju čitavog problema, nećemo se ovdje upuštati. Zašto? Pa odgovor može biti sadržan u njezinu najmanjem rješenju:

$$x=109931986732829734979866232821433543901088049,$$

$$y=50549485234315033074477819735540408886340.$$

Diofantska jednadžba drugog stupnja oblika:

$$x^2 + c\,y^2 = 1$$

jedna je od najpoznatijih jednadžbi ove vrste. Zove se **Pellova jednadžba** i njezino rješavanje moglo bi biti tema za jedan novi članak.

Usput, prema nizozemskom matematičaru Hendriku Willemu Lenstri, engleski matematičar John Pell zapravo je dobio počast ni kriv ni dužan, pogrešnom atribucijom Leonharda Eulera. Jednadžbi bi svakako bolje pristajalo ime jednog drugog Engleza, Williama Brounckera (1620.–1684.) koji ju je riješio odgovarajući time na jedan Fermatov izazov.

Želi li neki čitatelj ipak proučiti potpuno rješenje *Arhimedova problema stoke*, može potražiti Lenstrin vrlo zanimljiv članak koji je dostupan i na internetskoj adresi navedenoj pod [3]. Jednako tako možemo preporučiti i vrlo lijep članak američkog matematičara Ilana Vardija koji je naveden pod [2], u kojem je iscrpno rješenje problema, a navedene su i jednostavne eksplicitne formule za generiranje rješenja. Vardi misli kako je zbog ogromnih brojeva u računanju "teško povjerovati da je Arhimed mogao riješiti problem". Nije čak niti izgledno da bi znao postoji li njegovo rješenje.

Vardi je izračunao najmanji mogući broj sve stoke:

$$\left\lceil \frac{25194541}{184119152} \cdot [109931986732897349798662328214335439010880 49 + 5054948523433150330744778197355404089863 40 \cdot \sqrt{4729494}\,]^{4658} \right\rceil,$$

gdje oznaka $\lceil x \rceil$ znači najmanji cijeli broj veći ili jednak realnom broju x.

U poznatom časopisu **American Mathematical Monthly** Vardi piše: *Jednostavnost problema i složenost rješenja sjajan su izazov, a sam je problem još jedan prilog tvrdnji da je Arhimed jedan od najvećih matematičara svih vremena*.

Eto, čini se kako MiŠ ne može bez Arhimeda. U nekoliko smo brojeva pisali o njemu i njegovu djelu, a u ovom broju evo nam još jednog prelijepog problema povezanog s njegovim imenom.

LITERATURA

[1] Krumbiegel B., Amthor A., *Das Problema Bovinum des Archimedes*, Historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift fűr Mathematik und Physik Vol. 25, (153–171) (1880.)

[2] Vardi, Ilan, *Archimedes Cattle Problem*, American Mathematical Monthly, Vol. 105 (1998.)

[3] Lenstra, H. W. *Solving the Pell Equations*, Notices of the AMS, Vol. 49, Number 2, `http://www.math.nyu.edu/crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html`

[4] Antti Nygrén, *A simple solution to Archimede's cattle problem*, Oulu University Press, Oulu 2001. (dostupno na `http://herkules.oulu.fi/issn03553191/`)

[5] Homer, *Odiseja* (u prijevodu Tome Margetića), izd. Nakladni zavod Matice Hrvatske, Zagreb 2003.