

Austrijski matematički standardi



ALPEN - ADRIA
UNIVERSITÄT
KLAGENFURT 

Dubravka Glasnović Gracin,
Zagreb

U vremenu uvođenja nacionalnih ispita, državne mature, kao i pripreme za novi kurikulum u Hrvatskoj, nastavnicima i ostalim zainteresiranim građanima moglo bi biti zanimljivo pročitati kako su suvremeni standardi za matematiku riješeni u drugim zemljama. U ovom članku prikazani su Austrijski matematički standardi iz 2007. godine *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe*, tj. "Standardi za matematičke sposobnosti austrijskih učenica i učenika na kraju 8. godine školovanja" (IDM, 2007.).

Uvod

Standarde je izdao Institut für Didaktik der Mathematik Sveučilišta Alpen-Adria u Klagenfurtu u Austriji. Austrija je slijedila međunarodni trend razvoja obrazovnih standarda za razna područja pa tako i za matematiku. Glavni cilj donošenja novih standarda u Austriji bio je uspostaviti vezu između zahtjeva iz tekućih nastavnih planova (tj. "ulaznih" podataka) i matematičkih znanja kojima austrijski učenici trebaju raspolagati na kraju 8. razreda (tj. "izlaznih" podataka). Standardi iz 2007. godine prerađena su i poboljšana verzija standarda iz 2004. godine, a u predgovoru sadašnje verzije jasno stoji da sadašnji standardi mogu biti dobra osnova za daljnja razvijanja matematičkih standarda u Austriji.

Priprema za život i priprema za nastavak školovanja

Nastavni standardi za matematiku u Austriji orijentiraju se na dva međusobno nadopunjujuća zahtjeva u obrazovanju: zahtjev pripreme za životne situacije i zahtjev spremnosti za nastavak školovanja.

Jedan od neospornih zadataka svakog obveznog školovanja jest učenike pripremiti za rješavanje problema iz životnih situacija. Nastava matematike pritom ima ulogu učenika opremiti s onim matematičkim znanjem i sposobnostima koje bi mu pomogle za aktivno, promišljajuće i kritičko sudjelovanje u životu našeg društva. Standardi spominju višestruku ulogu matematike u društvu: matemati-

ku kao inventar svijeta u kojem živimo, matematiku kao sredstvo ljudske komunikacije, matematiku kao sredstvo shvaćanja i konstrukcije te matematiku kao misaonu tehnologiju.

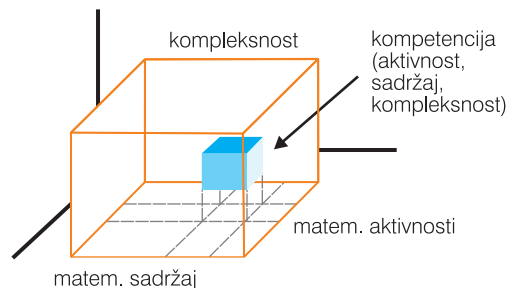
Na kraju osme godine školovanja u Austriji se ne provodi nacionalno testiranje znanja, već se spremnost za nastavak školovanja fokusira na ona matematička znanja i sposobnosti koja su potrebna kao baza za daljnju matematičku naobrazbu. Ta se spremnost u prvom redu odnosi na izgradnju čvrste baze u poznavanju osnovnih matematičkih pojmova i ideja te razvijanju matematičkog mišljenja. Tako spremnost za nastavak školovanja obuhvaća, primjerice, shvaćanje pojma funkcije te linearne funkcije, zatim shvaćanje što je to zapravo jednačica i njoj ekvivalentna jednačica, poimanje što je to definicija, što je teorem a što dokaz i sl.

Matematičke kompetencije

Austrijski matematički standardi jasno definiraju svaki važan pojam koji se spominje u dokumentu. Tako se definiraju kompetencije općenito, a zatim i matematičke kompetencije. **Kompetencije** se definiraju kao dugotrajno raspoložive kognitivne sposobnosti koje se trebaju razviti kod učenika i osposobiti ga za vježbanje određene radnje u raznim situacijama, kao i spremnost da se te sposobnosti adekvatno primijene.

Matematičke kompetencije su kompetencije koje se odnose na matematičke aktivnosti, matematičke sadržaje i vrstu kompleksnosti potrebnih povezivanja među njima. Standardi stoga prikazuju matematičke kompetencije u trima dimenzijama: dimenziji matematičkih aktivnosti (tj. što će se u zadatku raditi), sadržajnoj dimenziji (tj. čime će se baratati) te dimenziji kompleksnosti (koja se odnosi na vrstu i stupanj povezivanja). Svaka se dimenzija pritom dijeli na različite podvrste. Matematički sadržaj može se, primjerice, odnositi na geometriju, statistiku itd. Aktivnosti mogu, primjerice, biti računanje, prikazivanje, argumentiranje, dokazivanje itd. Model matematičkih kompetencija može se prikazati i slikom 3 (izvor: IDM, 2007., str 9.).

Model matematičkih kompetencija:



Slika 3. Model matematičkih kompetencija

Tako se matematički zadatak, u kojem se traži matematička kompetencija računanja duljine hipotenuze u zadanom pravokutnom trokutu, odnosi na geometriju (sadržajna dimenzija), računanje (dimenzija matematičke aktivnosti) te reproduktivno znanje Pitagorina poučka (najniži stupanj dimenzije kompleksnosti).

Matematički standardi do završetka 8. razreda odnose se na podskup matematičkih kompetencija kojima trebaju vladati učenici na kraju osme godine svog obaveznog školovanja. Oni se naslanjaju na vrijedeći nastavni plan iz matematike i gore opisani model matematičkih kompetencija.

Sada ćemo pobliže opisati sve tri dimenzije matematičkih kompetencija. To su matematičke aktivnosti, matematički sadržaji i kompleksnost.

Matematičke aktivnosti

U austrijskim obrazovnim standardima naglašene su četiri osnovne matematičke aktivnosti koje se pokazuju značajnima tijekom prvih osam godina obaveznog matematičkog školovanja. One uključuju razne originalne matematičke, kao i izvanmatematičke misaone aktivnosti. To su (1) prikazivanje i modeliranje, (2) računanje i operiranje, (3) interpretiranje te (4) argumentiranje i obrazlaganje.

Prikazivanje se odnosi na "prebacivanje" danih matematičkih podataka u drugi matematički oblik. Tu se, primjerice, ubrajaju crtanja ili skiciranja te prebacivanja iz jednog prikaza u drugi (tablični,

stupčasti, linijski, kružni i sl.). *Modeliranje* se ovdje odnosi na prepoznavanje relevantnih matematičkih odnosa iz danog zadatka i odabiru pripadnih matematičkih sredstava (pojmova, oblika prikazivanja u matematičkom obliku, tehnologije i sl.) te postupka rješavanja s ciljem uspješnog rješavanja problema.

Računanje se odnosi na provođenje elementarnih računskih operacija s konkretnim ili općim brojevima. *Operiranje* se odnosi na korektno, smisleno i efikasno provođenje računskih ili konstrukcijskih koraka. Uz provođenje osnovnih računskih operacija, računanje se može odnositi i na pretvaranja mjernih jedinica, umetanja vrijednosti u izraze, transformiranja izraza, rješavanje jednadžbi, procjenu rezultata, aproksimacije i približna računanja te provođenja elementarnih geometrijskih konstrukcija.

Interpretiranje se odnosi na prepoznavanje odnosa i relevantnih podataka danih u obliku matematičkih prikaza (grafičkih, simboličkih) i na njihovo tumačenje u danom kontekstu. Interpretiranje obuhvaća očitavanje podataka s grafičkih ili simboličkih prikaza i njihovo tumačenje u danom kontekstu, te raspoznavanje točnih od netočnih interpretacija.

Argumentiranje se odnosi na opisivanje matematičkih aspekata koji govore u prilog ili protiv neke određene odluke. Argumentiranje zahtijeva konkretnu i adekvatnu primjenu matematičkih odnosa i svojstava, matematičkih pravila, kao i pravilnu uporabu matematičkog jezika. Obrazlaganje se odnosi na niz istina koje vode do određenih zaključaka.

Matematički sadržaji

Matematički sadržaji, prema trenutačno vrijedećem austrijskom nastavnom programu, jesu u standardima podijeljeni u četiri kategorije: (1) brojeve i mjere; (2) varijable i funkcijske ovisnosti; (3) geometrijske oblike i tijela; (4) statističke prikaze i veličine. Primijetimo da u ovoj podjeli nema vjerojatnosti jer ona nije dio trenutačno vrijedećeg nastavnog plana u Austriji do 8. godine školovanja.

Brojevi obuhvaćaju prirodne, cijele, racionalne i iracionalne brojeve, zatim racionalne brojeve u razlo-

mačkom i decimalnom prikazu, načine pisanja potencija s cjelobrojnim eksponentom, korijene, postotke, kamate te poznavanje računskih operacija i pravila računanja s brojevima. *Mjere* se odnose na poznavanje mjernih jedinica za duljinu, površinu, obujam, masu, vrijeme te neke složene mjerne jedinice.

Varijable i funkcijske ovisnosti odnose se na poznavanje pojmova varijabli i izraza, jednostavnijih jednadžbi i nejednadžbi, sustava linearnih jednadžbi s dvjema nepoznicama, razne prikaze funkcijskih ovisnosti, linearnu funkciju te proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost.

Geometrijski oblici i tijela odnose se na poznavanje osnovnih geometrijskih pojmova, jednostavnijih geometrijskih likova i tijela, te njihovih osobina i prikaza. Tu se, primjerice, ubrajaju pojmovi poput točke, pravca, ravnine, polupravca, kuta, usporednice i okomice, trokuta, četverokuta, kruga, kocke, kvadra, prizme, piramide, valjka, stošca i kugle. Potrebno je i poznavanje pojma simetrije i sličnosti, Pitagorina poučka, te osnovnih geometrijskih formula za opseg, površinu, oplošje i obujam.

Statistički prikazi i veličine obuhvaćaju poznavanje grafičkih i tabličnih prikaza statističkih veličina, apsolutnu i relativnu frekvenciju, aritmetičku sredinu, medijan, kvartil i rangove.

Kompleksnost zadataka

Austrijski standardi, uz matematičke aktivnosti i sadržaj, naglašavaju dimenziju kompleksnosti jedinog zadatka. Naime, neki zadaci zahtijevaju samo direktnu primjenu poznavanja nekog pojma, pravila ili postupka, tj. jednostavne matematičke radnje. Drugi će pak zadaci zahtijevati određenu kombinaciju i povezivanje više matematičkih pojmova, pravila ili postupaka, dok će treći zahtijevati promišljanje o svojstvima i odnosima koji nisu neposredno vidljivi iz danog zadatka. Stoga se dimenzija kompleksnosti u matematičkim standardima sastoji od triju područja: (1) primjene osnovnih znanja i vještina; (2) uspostavljanja povezivanja; (3)

primjene reflektivnog znanja. Standardi također naglašavaju da se kompleksnost nekog zadatka odnosi na objektivne zahtjeve te da ona nije mjera za subjektivnu ili psihometrijsku težinu zadatka.

Primjena osnovnih znanja i vještina odnosi se na reprodukciju ili direktnu primjenu osnovnih matematičkih pojmova, teorema, postupaka ili prikaza.

Uspostavljanje povezivanja potrebno je kada je zadatak kompleksnije prirode pa zahtijeva povezivanje više pojmova, poučaka, postupaka ili prikaza, ili pak treba povezati različite matematičke radnje u cjelinu kako bi se riješio problem.

Refleksija se odnosi na promišljanje o odnosima koji nisu neposredno vidljivi iz danih matematičkih činjenica. Ona obuhvaća promišljanje o matematičkim postupcima, dobrim i lošim stranama određenog prikaza, o matematičkim modelima u određenom kontekstu, kao i promišljanje o danim interpretacijama, argumentiranjima ili dokazima. Refleksivno znanje odnosi se na razvijeno znanje o matematici s pomoću odgovarajućih misaonih procesa.

Konkretizacija standarda kroz zadatke

Nakon teorijskog uvoda autori standarda nude 48 matematičkih zadataka u kojima se traže različite matematičke kompetencije kojima bi trebali vladati učenici nakon završene osme godine školovanja. Ti su zadaci konkretizacija trodimenzionalnog modela u standardima jer pokazuju na primjerima kako se kompetencije iznose kroz aktivnosti, sadržaje i kompleksnost. S druge strane, ti zadaci prikazuju i standardizirane kompetencije jer daju smjernice na matematičke zahtjeve u austrijskim standardnim testovima. Zadaci su koncipirani tako da austrijskim nastavnicima daju odgovor kojim bi to znanjima i sposobnostima njihovi učenici trebali vladati na kraju osme godine školovanja. Oni uz sadržaj, aktivnosti i kompleksnost raznovrsno zastupaju i različite kontekste, kao i razne oblike pitanja. Ovdje donosimo neke od tih zadataka. Svih 48 zadata-

ka čitatelj može naći na web stranici navedenoj u literaturi (IDM, 2007.) na kraju članka.

Zadatak 1: Potencije

Sadržaj: Brojevi i mjere

Aktivnosti: Argumentiranje, obrazlaganje

Kompleksnost: Primjena osnovnih znanja i sposobnosti

Dan je sljedeći izraz: $\frac{5^5}{5^3} = 5^2$.

Pokaži da gornja tvrdnja vrijedi!

Rješenje:

$$\frac{5^5}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^2.$$

Napomene uz rješenje:

Dokaz u danom rješenju izvodi se s pomoću definicije potencije. Prijelaz iz koraka 2 na korak 3 zahtijeva poznavanje skraćivanja razlomaka.

Ostala također točna rješenja:

Dokaz preko računanja i primjene potenciranja:

$$\frac{5^5}{5^3} = \frac{3125}{125} = 25 = 5^2.$$

Dokaz preko pravila za dijeljenje potencija s istom bazom:

$$\frac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2.$$

Zadatak 2:

Sadržaj: Geometrijski oblici i tijela

Aktivnosti: Interpretiranje

Kompleksnost: Primjena osnovnih znanja i sposobnosti

Bačva oblika valjka visoka je 82 cm i ima promjer 82 cm. Bačva je do polovice napunjena vodom.

Što je prikazano izrazom $\left(\frac{82}{2}\right)^2 \cdot \pi$?

(Stavi križić ispred točnog odgovora.)

- Obujam bačve
- Oplošje bačve
- Obujam vode u bačvi
- Površina plašta bačve
- Površina baze bačve
- Opseg baze bačve

Rješenje:

Izraz $\left(\frac{82}{2}\right)^2 \cdot \pi$ odnosi se na površinu baze bačve.

Zadatak 3: Frekvencija

Sadržaj: Varijable i funkcijske ovisnosti

Aktivnosti: Računanje, operiranje

Kompleksnost: Uspostavljanje povezivanja

Frekvencija radiovala može se izračunati s pomoću sljedeće formule:

$$f = \frac{c}{l}$$

f – frekvencija u Herzima (titraji u sekundi)

c – brzina širenja vala u m/s

l – duljina vala u metrima

Podatak "Ö3 na 99,9 UKW" znači da se radiovala emitira s frekvencijom od 99,9 MHz, a to je 99,9 milijuna Herza. Radiovalovi imaju brzinu širenja od 300 000 km/s.

Kolika je duljina tog radiovala?

Rješenje:

$$l = 3,003 \text{ m.}$$

Napomena uz rješenje: Zaokruživanje na 3 m smatra se točnim rješenjem.

Zadatak 4: Koalicije

Sadržaj: Statistički prikazi i veličine

Aktivnosti: Prikazivanje, modeliranje

Kompleksnost: Primjena refleksnog znanja

Stranke parlamenta često se udružuju u tzv. koalicije (zajedništva) s drugim strankama, kako bi zajedno raspolagale većinom mandata (većinom glasova) u parlamentu.

Želimo s pomoću grafičkog prikaza raspodjele mandata u nekom parlamentu prosuditi koje bi koalicije mogle imati većinu u parlamentu.

Zašto nam je za to kružni dijagram prikladniji od stupčastog?

Rješenje:

Zato što s pomoću kružnog dijagrama možemo vidljivo prepoznati koje stranke mogu imati udio veći od 50%. S pomoću stupčastog dijagrama udio u cjelini u pravilu nije neposredno vidljiv.

Zadatak 5: Cijene razgovora mobitelom

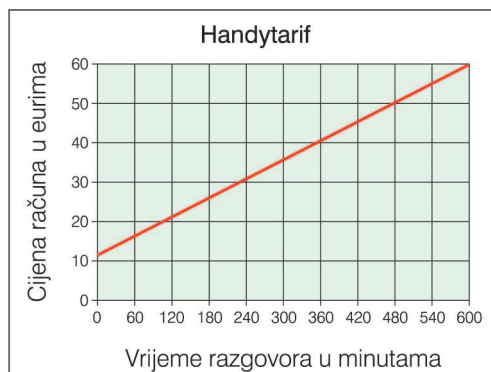
Sadržaj: Varijable i funkcijske ovisnosti

Aktivnosti: Interpretiranje

Kompleksnost: Uspostavljanje povezivanja

Telefonska kompanija nudi nove cijene razgovora mobilnim telefonima. Iz danoga grafa možemo pročitati nove tarife za jedan mjesec.

Koliko iznosi cijena razgovora po minuti?



Rješenje:

Cijena razgovora je 0.08 eura po minuti.

Napomene uz rješenje:

Iz grafa je vidljivo da je osnovna cijena oko 12 eura, a cijena razgovora za 600 minuta tada iznosi $60 - 12 = 48$ eura. Iz toga proizlazi da cijena razgovora po minuti iznosi $48 : 600 = 0.08$ eura.

Manje pogreške u očitavanju grafa treba tolerirati: rješenje računa treba uzeti kao točno ako se ono, zaokruženo na dvije decimale, slaže s ovdje danim rješenjem.

Zaključak

Austrijski obrazovni standardi za matematiku pokazuju se kao promišljeno sistematizirana i dobra osnova za kvalitetnu nastavu matematike. Uz to, pogodni su za istraživanja u području metodike nastave matematike. Ta istraživanja nisu samo vezana za analizu nastave matematike u Austriji. Primjerice, analiza zadataka iz statistike u hrvatskim udžbenicima (Glasnović Gracin) pokazuje da u našim udžbenicima i zbirkama zadataka u području statistike najveći udio imaju aktivnosti računanja, dok se sposobnosti argumentiranja gotovo uopće ne traže od učenika. Nalaz također pokazuje da u području kompleksnosti u hrvatskim

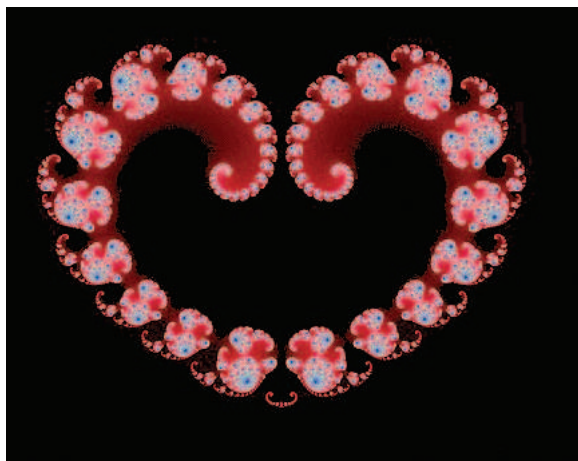
udžbenicima u poglavljima iz statistike dominiraju zadaci koji zahtijevaju znanja reprodukcije, dok su zadaci koji zahtijevaju refleksivno znanje jedva zastupljeni.

Također, austrijski standardi nastavnicima daju veliku lepezu zadataka iz osnovnoškolske matematike koja je dobar orijentir za matematičke zahtjeve u nastavi matematike.

Namjera sastavljanja ovog članka nije bila predložiti da u naš kurikulum kopiramo austrijske standarde, već upoznati zainteresirane kolege sa standardima koje imaju austrijski kolege i potencijalima toga dokumenta, s ciljem poboljšanja nastave matematike.

LITERATURA

- 1/ Glasnović Gracin, D.: *The Requirements in Statistics Education – Comparison of PISA Mathematical Tasks and Tasks from the Mathematical Textbooks in the Field of Statistics* (neobj.)
- 2/ IDM – Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – IFF, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (Hrsg.) (2007): *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07*. Klagenfurt. Dana 7.8.2009. dokument dostupan na: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept.Version_4-07.pdf



Svojim dragim čitateljicama i čitateljima čestitamo Valentinovo:

Volite se ljudi!

Prošlih smo godina u prigodi Valentinova objavili nekoliko atraktivnih priloga koje ste mogli upotrijebiti za izradbu zidnih postera ili u neku drugu svrhu. Danas vam samo uz čestitku prilažemo jedan lijepi fraktal preuzet s internetske adrese

<http://webplaza.pt.lu/laurent3/include/html/romantic.html>
na kojoj ćete pronaći još nekoliko lijepih sličica.