Terminološki problemi u nastavi matematike

Zdravko Kurnik, Zagreb

Jedan od ciljeva nastave matematike jest **učenje usmene i pisane matematičke riječi** sa svim njezinim svojstvima kao što su jasnoća, jednostavnost, punoća, preciznost.

Prema tome, nastava matematike u prvome redu svakome učeniku mora biti jasna i razumljiva, a poučavanje jednostavno i što više prilagođeno matematičkim sposobnostima i razinama mišljenja učenika. S druge strane, nastavnik matematike kod učenika treba razvijati sposobnost preciznog iskazivanja matematičkih činjenica i postupno podizati razinu njihovog matematičkog mišljenja.

Pri ostvarenju postavljenog cilja javlja se niz poteškoća. Prva poteškoća je u činjenici da je jezik nastave matematike sam po sebi složen, jer sadrži dvije komponente: govorni jezik i matematički jezik. Matematički jezik je djelotvoran ali, kao što znamo, i sam složen. Druga poteškoća je u činjenici da zbog uzrasta i različitog predznanja učenika obrada matematičkih sadržaja u nastavi ne mora, a vrlo često i ne može biti precizna i stroga. Dopušten je stanovit stupanj slobode i pojednostavljenja. Međutim, sva pojednostavljenja ne smiju narušiti ni jedno načelo nastave matematike. Ne smiju utjecati na razumijevanja i jasnoću obrade, posebno obrade matematičkih pojmova.

U ovom članku ukazat ćemo na neke probleme koji se odnose upravo na jezik i terminologiju školske matematike, tj. na ukupnost naziva za pojmove koji se uvode i opisuju u nastavi matematike.

Dužina i duljina dužine

Dužina je najčešći objekt koji se pojavljuje u geometriji. Definira se kao skup svih točaka pravca omeđen s dvjema njegovim točkama. Ako su te točke A i B, onda se ona označuje s $\overline{AB}$. Svaka dužina karakterizirana je i svojom duljinom koja se označuje s $|AB|$. Navedene činjenice vode na zaključak da na jasnoću poučavanja geometrije utječu i ova dva pojma: **dužina** i **duljina dužine**.

Najvažniji geometrijski pojmovi koji imaju karakter dužine jesu: stranice i dijagonale mnogokuta, srednjice trokuta i trapeza, težišnice trokuta i tetraedra, polumjeri, promjeri i tetive kruga, visine trokuta, trapeza i geometrijskih tijela, bridovi uglatih tijela, izvodnice valjka i stošca, osi i promjeri elipse i dr. Često se radi pojednostavljenja ove dužine poistovjećuju sa svojim duljinama. Tako se govori i piše "stranica trokuta a", "simetrala kuta α siječe nasuprotnu stranicu a, dijagonale romba e i f su okomite", "polumjer kružnice r", "visina stošca je udaljenost vrha od ravnine osnovke".

Poistovjećivanjem dužina s brojevima zanemaruje se skupovni karakter dužina, a velika učestalost navedenih pojednostavljenja stvara naviku koju je teško iskorijeniti. To potvrđuju rezultati metodičkih radionica studenata nastavničkih profila i stručni ispiti mladih nastavnika matematike.

Funkcija i graf funkcije

Ovo je važan i složen matematički pojam koji se obrađuje i u osnovnoj i u srednjoj školi. Zato ga je potrebno primjereno definirati na svakoj razini.

U osnovnoj školi s pojmom funkcije susrećemo se u višim razredima. Tu se više radi o opisima pojma, nego o strogim definicijama. Zato u njima ima dosta manjkavosti. Primjer:

> Ovisnost jedne veličine o drugima u matematici zovemo **funkcijama**. Da veličina y ovisi o veličini x po funkciji f bilježimo $y = f(x)$. Za x kažemo da je broj na koji primjenjujemo funkciju f i zovemo ga **argumentom funkcije**. Za y kažemo da je pripadajuća **vrijednost funkcije** za argument x.

U definiciji se ne vidi skupovni karakter pridruživanja.

* * *

Preciznije se uvodi pojam linearne funkcije. Primjer:

> **Linearna funkcija** je pridruživanje zadano formulom $y = ax + b$ ili $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Brojevi a i b su **koeficijenti** te linearne funkcije, x je **argument** ili **nezavisna varijabla**, a y je **vrijednost funkcije** ili **zavisna varijabla**.

Skupovni karakter pridruživanja bolje se vidi u uvodnom primjeru, nego u samoj definiciji pojma.

* * *

Grafički prikazi funkcija poseban su slučaj, osobito kada učenici još nisu upoznali skup realnih brojeva $\mathbf{R}$. Imamo sljedeće primjere:

> Grafički prikaz proporcionalnosti $y = kx, k > 0$ u koordinatnom sustavu u ravnini je **pravac**.

> Grafički prikaz obrnute proporcionalnosti $xy = k, k > 0$ u koordinatnom sustavu u ravnini jest **krivulja**.

> Graf linearne funkcije $y = ax + b$ u koordinatnom sustavu u ravnini je **pravac**.

U sva tri primjera svjesno se prelazi preko činjenice da formulacije nisu potpuno ispravne, jer na tim pravcima, odnosno krivulji "još ima mjesta" za realne brojeve! Bolje bi bilo govoriti da je svaki grafički prikaz skup uređenih parova brojeva (x, y) koji svi pripadaju jednom pravcu, odnosno krivulji (kojoj krivulji?).

Nije ispravno ni formulu $f(x) = ax+b$ kojom je zadana linearna funkcija f poistovjetiti s jednadžbom pravca $y = ax + b$.

* * *

Precizna definicija funkcije:

> Neka su D i K zadani skupovi. Pravilo ili postupak f po kojemu se svakom elementu x skupa D pridružuje točno jedan element y skupa K koji se označuje s $y = f(x)$ naziva se **preslikavanje** ili **funkcija** sa skupa D u skup K i označuje s $f : D \to K$.

> Skup D naziva se **domena** ili **područje definicije**, skup K **kodomena** ili **područje vrijednosti** funkcije f, a $f(x)$ **vrijednost funkcije** u x ili **slika** elementa x u skupu K.

Vidimo da je funkcija zapravo uređena trojka (D, K, f), koja se sastoji od domene D, kodomene K i pravila pridruživanja f.

Nije ispravno, kao što se to često čini, poistovjećivanje simbola f i $f(x)$.

* * *

Pišući ove retke prisjetio sam se anegdote koju je davne godine nama, studentima, ispričao profesor matematičke analize.

Na ispitu iz diferencijalnog računa profesor je jednom studentu postavio problem istraživanja svojstava neke funkcije. Student je na ploči nešto mrmljao i petljao da bi se onda okrenuo profesoru i glasno rekao:

– Sve mi je jasno, samo ne znam što znači ovaj $f(x)$!

Kompleksni brojevi

Tradicionalna obrada kompleksnih brojeva u nastavi matematike ima sljedeće korake:

Počinje se uvođenjem **imaginarne jedinice**, broja i koji ima svojstvo da je $i^2 = -1$. Piše se i $i = \sqrt{-1}$ (ispravno je $\sqrt{-1} = \pm i$). Taj broj dodaje se realnim brojevima i s njim računa kao i s tim brojevima.

Zatim se uvode **imaginarni brojevi** bi, koji se dobivaju množenjem realnih brojeva b i imaginarne jedinice i.

Zbrajanjem realnih brojeva a i imaginarnih brojeva bi dobivaju se **kompleksni brojevi**. Prema tome, **kompleksni broj** je oblika $a + bi$. Svi kompleksni brojevi tvore **skup kompleksnih brojeva** koji se označava s $\mathbf{C}$.

Tek sada pokazuje se da za operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva vrijede formule

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Osnovni problem ovog pristupa je problem egzistencije skupa $\mathbf{C}$.

* * *

Drugi pristup:

Počinje se postavljanjem problema pronalaženja skupa brojeva koji ispunjava sljedeća tri uvjeta:

1) Skup treba sadržavati skup realnih brojeva $\mathbf{R}$.
2) Skup treba sadržavati rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$. Označimo to rješenje s i.
3) U skupu treba definirati dvije algebarske operacije, zbrajanje i množenje koje moraju imati ista osnovna svojstva kao i zbrajanje i množenje u skupu $\mathbf{R}$. Posebno, skup mora pored broja i sadržavati umnožak bi i zbroj oblika $a + bi$.

Pokazuje se da je jedno proširenje skupa $\mathbf{R}$ koje ispunjava postavljene uvjete skup $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ uređenih parova realnih brojeva na kojemu su operacije zbrajanja i množenja definirane formulama

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Skup $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ zajedno s ovako definiranim operacijama zbrajanja i množenja naziva se **skup kompleksnih brojeva** i označava s $\mathbf{C}$. Elementi skupa $\mathbf{C}$ zovu se **kompleksni brojevi**.

Ovaj problem je vrlo prikladan za samostalni rad učenika i istraživanje svojstava promatranog skupa $\mathbf{C}$.

Kut i mjera kuta

To je jedan od najvažnijih pojmova geometrije. Pri uvođenju tog pojma treba tražiti odgovore na ova tri pitanja:

Što je kut? Kako mjerimo kutove? Kako zbrajamo kutove?

Iz prakse znamo da je s pojmom kuta u nastavi matematike oduvijek bilo poteškoća. Jedan od razloga je i taj što se kut uvodi vrlo rano pa nije moguće početi s definicijom koja bi bila i suvremena i stroga, nego se taj pojam razvija prema uzrastu učenika. Zato su u primjeni ovog pojma česta pojednostavljenja i nedorečenosti. Možda i prečesta.

Pri uvođenju pojma kuta postupalo se na različite načine. Kao prirodan problem je pitanje primjerenosti i odnosa raznih definicija i njihov utjecaj na jasnoću i razumijevanje pojma. Načinimo mali pregled opisa razvoja pojma kuta u našim udžbenicima:

1) (III. razred) Neka su a i b polupravci sa zajedničkom početnom točkom V. Možemo zamisliti da polupravac a pri vrtnji ostavlja tragove sve dok se ne poklopi s polupravcem b. Svi ti tragovi čine dio ravnine koji se zove **kut**. Oznaka: (a, b).

Uvodi se relacija sukladnosti kutova.

Samo je odgovor na prvo pitanje jasan: kut je dio ravnine.

2) (V. razred) Neka su AB i AC dva dana pravca. Promatrajmo po jednu poluravninu što ih određuju ti pravci. Presjek poluravnina je **kut**. Oznaka: $\sphericalangle BAC$.

Uvodi se: relacija sukladnosti kutova $\cong$, mjera kuta od $0°$ do $360°$, pojam nekonveksnog kuta.

(VI. razred) Uvodi se zbrajanje kutova zbog zbroja kutova u trokutu. Ako se kut definira kao presjek poluravnina, ne možemo imati kut veći od $180°$.

U ovom slučaju odgovor na treće pitanje je problematičan: svaki od kutova može biti manji od $180°$, ali njihov zbroj ne mora.

3) (1. razred) Neka je S skup svih polupravaca ravnine s vrhom O. U skupu $S \times S$ definira se relacija $\approx$: uređeni par (x_1, x_2) je u relaciji $\approx$ s uređenim parom (y_1, y_2) ako postoji rotacija f koja polupravac x_1 preslikava na x_2 i y_1 na y_2. $\approx$ je relacija ekvivalencije. Klasa svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca naziva se **kut** s vrhom u točki O. Oznaka: $\sphericalangle(x_1 O x_2)$ (predstavnik kuta).

4) (3. razred) **Kut** je uređen par (p, q) dviju zraka koje imaju isti početak V. Označavamo ga s $\sphericalangle pVq$. Točku V nazivamo **vrh**, zraku p nazivamo **prvi krak**, a zraku q drugi **krak kuta** $\sphericalangle pVq$. Kut definiran na ovaj način naziva se **orijentirani kut**.

Korijen i rješenje

Pojam **korijen** shvaća se na različite načine: korijen iz broja, korijen jednadžbe, korijen biljke, korijen zuba, korijen živca. Dvoznačnost u nastavi matematike treba izbjeći dosljednom zamjenom slabog termina **korijen jednadžbe** zaista primjerenim terminom **rješenje jednadžbe**.

Pojam **rješenje** ima i jednu slabu stranu: uobičajeno je da se postupak obrade nekog problema naziva rješenje, pa tako često imamo rješenje problema u kojemu imamo više rješenja! Metodički ispravnije je da se postupak naziva **rješavanje**, a rezultati **rješenja**.

Piramida

Piramida je uglato geometrijsko tijelo omeđeno jednim mnogokutom i trokutima koji svi imaju jedan zajednički vrh. Ako je mnogokut n-terokut, onda se takva piramida naziva ***n*-terostrana piramida**. Promatra li se piramida kao vrsta poliedra, onda on nije n-terostran, već ima ***n*+1** stranu! Broj ***n*** odnosi se na broj stranica osnovke, odnosno broj pobočaka piramide, a ne na broj strana same piramide. Dakle, naziv n-terostrana piramida nije sasvim primjeren.

Tetraedar je vrsta piramide, ali koja? Pojam je nastao u starogrčkoj matematici i naziv je za jedno od 5 konveksnih pravilnih poliedara, poliedara koji su omeđeni sukladnim pravilnim poligonima. Ti poliedri nazivaju se još i Platonova tijela. U slučaju tetraedra poligoni su pravilni trokuti i ima ih četiri.

Naziv mu je vrlo sugestivan, jer potječe od riječi tetra-četiri i hedra-strana. Danas se u geometriji svaka piramida kojoj je osnovka trokut naziva tetraedar. Pri poučavanju piramida treba dobro razlikovati sljedeće nazive: **tetraedar** (Platonovo tijelo, trostrana piramida), **pravilni tetraedar** (Platonovo tijelo), **trostrana piramida**, **pravilna trostrana piramida**.

Plašt

Rječnici matematički pojam **plašt** opisuju kao zakrivljenu plohu koja je dio nekih oblih geometrijskih tijela što se obrađuju u školskoj matematici. Tu se misli na valjak, stožac i krnji stožac pa se uvode pojmovi **plašt valjka**, **plašt stošca** i **plašt krnjeg stošca**. Za ta obla tijela plašt je prirodan i sugestivan naziv. Jedino što nije prirodno i metodički primjereno jest to što se pojam plašta definira pomoću složenijeg pojma zakrivljene plohe. Što je zakrivljena ploha?

U nekim matematičkim knjigama mogu se naći a i na nastavnim satima čuti nazivi **plašt piramide**, **plašt prizme**. Uvođenje ovakvih pojmova nije ispravno, pogotovo u svjetlu činjenice da za odgovarajući dio uglatog tijela, piramide ili prizme, postoji naziv **pobočje** (unija svih pobočaka) pa su za njih ispravni nazivi **pobočje piramide** i **pobočje prizme**.

Prizma

Prizma je uglato geometrijsko tijelo omeđeno s dva sukladna mnogokuta u paralelnim ravninama i paralelogramima. Ako su mnogokuti n-terokuti, onda se takva prizma naziva **n-terostrana prizma**. Promatra li se prizma kao vrsta poliedra, onda on nije n-terostran, već ima $n+2$ strane! Broj n odnosi se na broj stranica osnovaka, odnosno broj pobočaka prizme, a ne na broj strana same prizme. Dakle, naziv n-terostrana prizma nije sasvim primjeren.

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je osnovka pravokutnik. Naravno, i kvadar kao vrsta poliedra nema samo 4 strane, već 6. **Kocka** je vrsta kvadra pa i ona pripada skupu četverostranih prizmi, a ima 6 strana! O tome lijepo govori i njezin izvorni naziv **heksaedar** (hex – šest, hedra – strana).

Sukladnost

Sukladnost je relacija na skupovima točaka ravnine ili prostora. Evo opće definicije: Za skupove točaka M i N kažemo da su **sukladni** i pišemo $M \cong N$ ako postoji izometrija f koja skup M preslikava na skup N, tj. takva da je $f(M) = N$.

Nas posebno zanimaju sukladne dužine, sukladni kutovi i sukladni trokuti, jer su to jednostavniji podskupovi točaka ravnine i jer se oni definiraju zornije: Za dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ kažemo da su **sukladne** ako su jednakih duljina, tj. ako je $|AB| = |CD|$. Za dva kuta kažemo da su **sukladna** ako imaju jednake veličine. Za dva trokuta kažemo da su **sukladna** ako imaju sukladne odgovarajuće stranice i sukladne odgovarajuće kutove.

Pojam sukladnosti je uistinu jednostavan i teško je objasniti zašto se u našoj nastavnoj praksi umjesto sukladnosti na mnogim mjestima uporabljuju neke zamjene koje nisu metodički i stručno primjerene, a ni ispravne, primjerice: “jednake dužine”, “jednaki kutovi”, “trokuti koji se podudaraju”, “iste baze”.

Zaključak

Nastavnik matematike treba poznavati sve probleme koji se u nastavi pojavljuju, razloge zašto se na pojedinim mjestima izbjegava strogost i preciznost, a pribjegava pojednostavljenom načinu izražavanja i dopušta određena tolerancija. Ponekad su pojednostavljenja uistinu nužna, ali postoje i ona koja nisu opravdana i čiji utjecaj na jasnoću poučavanja nije dobar. U ovome članku opisano je nekoliko matematičkih pojmova i mjesta na kojima pred svakim nastavnikom matematike stoji dilema: pojednostavljenje ili ne?