Bez riječi

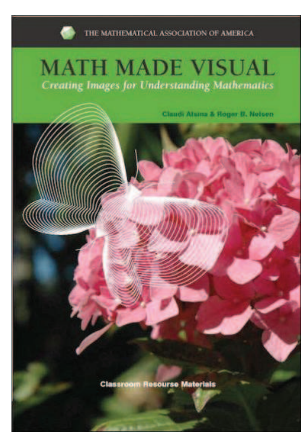
Branimir Dakić, Zagreb

STOP talk & chalk
Claudi Alsina[1]

Godine 1993. američki matematičar Roger B. Nelsen[2] objavio je prvu od svojih dviju knjiga ***Proofs Without Words***, (*Dokazi bez riječi*) [1]; druga se pojavila 2000. [2], a godine 2006. Nelsen je sa španjolskim matematičarom Claudijem Alsinom objavio ***Math Made Visual*** [3], knjigu slične tematike, s podnaslovom *Creating Images for Understanding Mathematics*[3]. Čitav niz "dokaza bez riječi" objavljen je tijekom godina, od 70-ih do danas, u *Mathematics Magazine* i *College Mathematics Journal*, dvama časopisima američke matematičke udruge MAA (*The Mathematical Association of America*) te u mnogim drugim matematičkim tiskovinama. Podsjećam da smo i mi u MiŠ-u prikazali nekoliko lijepih "dokaza bez riječi"[4]. U ovom članku pokušat ćemo opisati ovaj duhovit, vrlo zanimljiv i zoran oblik predodžbe dokaza izvjesnih matematičkih činjenica koji, bez imalo dvojbe, može naći svoje mjesto i u nastavi matematike.

Što se točno podrazumijeva pod sintagmom ***"dokaz bez riječi"***?

Intuitivno je jasno: zamisao je slikom, umjesto tekstom (riječju), predočiti dokaz neke matematičke tvrdnje. Promatranjem, vizualnom percepcijom i misaonom analizom slike (crteža, skice) čitatelj treba otkriti njezinu poruku. Odmah se nameće pitanje, može li se ovakva prezentacija prihvatiti kao *pravi* matematički dokaz? I dok se u nekim



[1] Claudi Alsina (1952. –), profesor matematike, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.
[2] Roger B. Nelsen (1942. –), profesor matematike na Odjelu matematike, Lewis and Clark College, Portland, Oregon.
[3] U toj je knjizi objavljen vrlo bogat popis pisanih izvora u kojima se obrađuje ova tema.
[4] Vidi npr. MiŠ 1/1999, 2/1999, 5/2000, 41/2007, 43/2008.

slučajevima radi o uistinu uvjerljivom dokazu kojem nema nikakva prigovora, u nekim primjerima to baš i nije tako. Dokaz tvrdnje nije u potpunosti izložen i čitljiv ali analiza slike otkriva kako ga možemo jednostavno provesti. Gledišta koja u nastavi matematike ustraju na matematičkom formalizmu i strogoći pa odbacuju "dokaze bez riječi" i slične didaktičke dosjetke nisu opravdana. Tako je primjerice stav T. Eisenberga i T. Dreyfusa, dvaju uglednih stručnjaka za matematičko obrazovanje, kako "*vizualni argumenti imaju malu vrijednost jer postoji samo jedan način matematičke komunikacije i dokazi bez riječi nisu prihvatljivi*" [4] u najmanju ruku pretjerano isključiv. A taj njihov stav nije niti usamljen među matematičarima čija je sklonost prema vizualizaciji matematičkih sadržaja ipak vrlo različita i subjektivna. Neki, nogometnim rječnikom rečeno, "totalni matematičari", zaziru od svakog zora, drže ga svojevrsnom vulgarizacijom[5] matematike. Tako primjerice veliki francuski matematičar-bourbakist Jean Dieudonné, poznat po svojoj krilatici "*Dolje Euklid, smrt trokutu!*", kaže: "*Odlučio sam da u svoj tekst ne unosim ni jedan jedini crtež.*". Sušta je suprotnost George Pólya koji rješavačima matematičkih problema šalje pedagošku uputu "*Nacrtaj sliku*", savjetuje im dakle da rješavanje problema započnu njegovom vizualnom predodžbom. Uvrstimo ovdje i uvjerenje velikog Paula Halmosa: "*Preduvjet matematičke obrazovanosti jest biti rođen sa sposobnošću vizualizacije.*" Ne zaboravimo ni na legendarnog Martina Gardnera koji još davne 1973. pišući o dokazima bez riječi u svojoj kolumni "Mathematical Games" u uglednom Scientific Americanu[6] za njih rabi naziv "*look-see* dijagrami" i podsjeća kako u engleskom jeziku "*to see*" (vidjeti) često znači "*to understand*" (razumjeti). U istom članku, osvrćući se na vizualnu predodžbu ne geometrijskih već algebarskih sadržaja on piše: "*Od dobrog crteža nema učinkovitije podrške razumijevanju izvjesnih algebarskih identiteta. Svakako, u svrhu dokaza, treba znati manipulirati simbolima, no u mnogim slučajevima dosadan se dokaz može zamijeniti geometrijski analognim, jednostavnim i lijepim tako da valjanost teorema gotovo pa nas zaslijepi.*" Već spomenuti Claudi Alsina, veliki zagovornik zorne matematike uzvikuje: "*Stop talk and chalk*" – prestanite s metodom "priče i krede" u nastavi matematike, a čitateljima preporučujemo njegov članak [5] čiji je već sam naslov vrlo simptomatičan: "*Less chalk, less words, less symbols...more objects, more context, more action*"[7].

Vizualne predodžbe dokaza matematičkih tvrdnji u kojima se potpuno izbjegava njihov opis riječima svojevrsne su zagonetke koje potiču učenike na razmišljanje, na cjelovitu primjenu ranije usvojenih znanja, na razvitak matematičke intuicije i vrlo su učinkovit oblik učenja. One u sebi objedinjuju mnoge sastavnice koje čine aktivno matematičko mišljenje: analizu, uočavanje suštine, potrebu obrazlaganja pojedinih zaključaka, apstrakciju, sintezu itd. Slikovni zapis koji opisuje neki matematički sadržaj provodi se raznim sredstvima, od običnog crteža kredom na školskoj ploči do animiranih sekvenci na suvremenom računalu[8]. Velik dio poučaka elementarne geometrije nezamisliv je, dapače neizvediv, bez popratne skice. I dok je u geometriji ovaj pristup prirodan i sam se nameće, vizualna predodžba algebarskih činjenica ipak je jedna nova dimenzija u nastavi matematike pa će i tome biti posvećen dio članka.

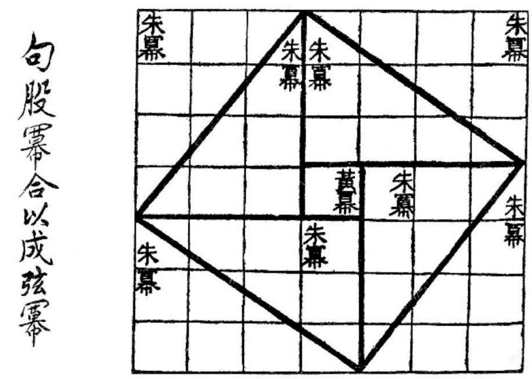
Valja spomenuti, a to je iskustvo svakog nastavnika, kako loša slika (skica) može povući pogrešne zaključke ili krivi smjer rješavanja problema. Nisu svi trokuti jednakokračni, nisu ni svi četverokuti kvadrati, niti su sve piramide uspravne a i četiri su, a ne jedna, karakteristične točke trokuta od kojih se doduše neke mogu i poklapati. Na takve greške učenike treba neprestance upozoravati. Ali to je već neka nova tema.

Povijesni korijeni

Osvrnemo li se u prošlost uvjerit ćemo se kako "dokazi bez riječi" nisu *izum* novog doba. Naime, stari narodi zbog nerazvijenog matematičkog rječnika,

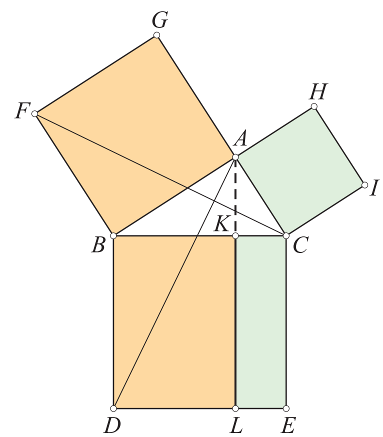
[5] Vulgarizacija = pretjerano pojednostavljenje neke znanosti koje grubo unakazuje njezinu bit (prema Klaićevom *Rječniku stranih riječi)*.
[6] Scientific American, October 1973.
[7] Manje krede, manje riječi, manje simbola, više stvari, više konteksta, više akcije.
[8] Vidjeti primjerice: `www.normala.hr`.

matematičke simbolike i pisma izdašno su se izražavali raznim skicama i crtežima. Na slici vidimo jedan od mnogih zornih prikaza Pitagorina poučka. Potječe iz Kine i star je više od 2 tisućljeća. Možete li s te slike iščitati njegov dokaz?



Kad je riječ o povijesti dokaza bez riječi svakako je najuvjerljiviji primjer već spomenuti Pitagorin poučak koji je tijekom nekoliko tisućljeća doživio više stotina raznih dokaza. Među njima se posebno ističu oni vezani uz *vjetrenjaču*, *mladenkin stolac*, *pauna* ili kako se već zbog svoje silne popularnosti zove ta interpretacija ovog poučka u kojoj valja dokazati da je površina kvadrata konstruiranog nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka zbroju površina dvaju kvadrata konstruiranih nad njegovim katetama. Kako u geometriji ravnine ionako oskudijevamo pravim primjerima primjene poučaka o sukladnosti trokuta, ovaj dokaz Pitagorina poučka (uz onaj gdje se dokazuje obrat Pitagorina poučka) vrlo je vrijedan i to iz više razloga.

Promatranjem slike uočavamo obojenost dvjema bojama što odmah nameće pomisao da dijelovi ravnine obojeni istom bojom imaju jednake površine. Tim zaključkom usmjerava se dalji tijek dokaza. Istaknuta su još i dva trokuta $\triangle FBC$ i $\triangle ABD$ čiju sukladnost je lako uočiti i provjeriti. Zaključujemo zatim da trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle BDK$ imaju jednake površine pa konačno da jednake površine



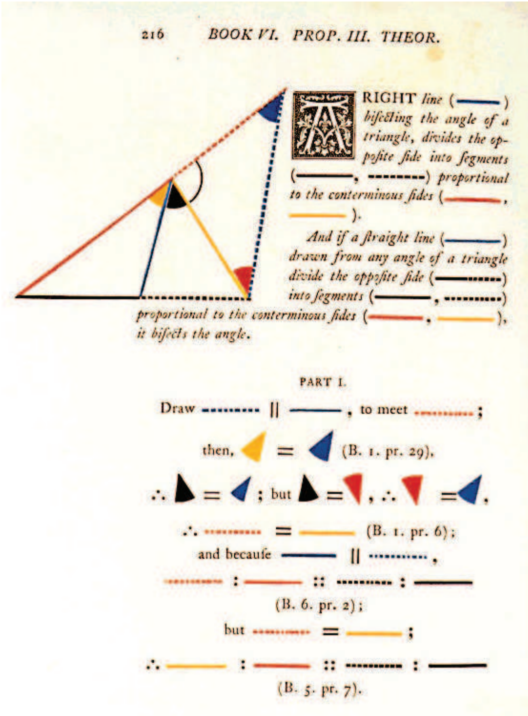
imaju i kvadrat $FBAG$ i pravokutnik $BDLK$. Analogno je površina kvadrata $CIHA$ jednaka površini pravokutnika $LECK$.

Vrlo lijep i uvjerljiv primjer "dokaza bez riječi" su razne geometrijske interpretacije algebarskih sadržaja u starogrčkoj matematici. Posebice se to susreće kod Euklida, u njegovim "Elementima", gdje se geometrijskim tehnikama dokazuju razne algebarske tvrdnje. Vjerojatno je to posljedica utjecaja pitagorejaca, a u suštini je zapravo riječ o babilonskoj tradiciji u kojoj se rješavanje matematičkih problema u pravilu oslanjalo na crteže. Posebice kad je riječ o II. knjizi "Elemenata" uobičajeno se govori kako je njezin sadržaj *geometrijska algebra*.

Uzgred, dobro se prisjetiti kako su "Elementi" u nevjerojatno dojmljivoj ilustrativnoj obradi engleskog matematičara Olivera Byrnea (1847.) [8] dobar primjer nastojanja da se neki matematički sadržaj izloži zorno, rafiniranim vizualnim sredstvima, prije svega crtežima kod kojih je osobito bitna boja. Byrne je pritom nastojao da u toj njegovoj slikovnici bude što manje teksta[9] i da čitatelj svladava gradivo otkrivajući što se skriva iza njegovog svojevrsnog slikovnog pisma.

Nasumično smo odabrali za čitatelje MiŠ-a jednostavan *Poučak o simetrali kuta u trokutu*[10]. Slijedeći Byrneov zapis, proći ćemo kroz sam dokaz.

[9] Panoptikum MiŠ-a 34/2006.
[10] "Euklidovi Elementi", Knjiga VI., prop. 3.


216 BOOK VI. PROP. III. THEOR.

A RIGHT *line* ( ) *bisecting the angle of a triangle, divides the opposite side into segments* (,) *proportional to the conterminous sides* (,).

And if a straight line ( ) *drawn from any angle of a triangle divide the opposite side* ( ) *into segments* (,) *proportional to the conterminous sides* (,), *it bisects the angle.*

PART I.

Draw || , to meet ;

then, = (B. 1. pr. 29).

∴ = ; but = , ∴ = .

∴ = (B. 1. pr. 6);

and because || ,

: :: :

(B. 6. pr. 2);

but = ;

∴ : :: :

(B. 5. pr. 7).

Simetrala kuta trokuta dijeli stranicu na dva dijela čije su duljine u istom omjeru kao i duljine stranica nad njima.

Dokaz. Nacrtajte pravac točkom B paralelan simetrali CD kuta $\sphericalangle ACB$ i neka on siječe produženu stranicu AC u točki E. Tada je $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle AEB$ ("Elementi" knjiga I., propozicija 29.).

Nadalje, $\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle CEB$ i $\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle CBE$ pa je

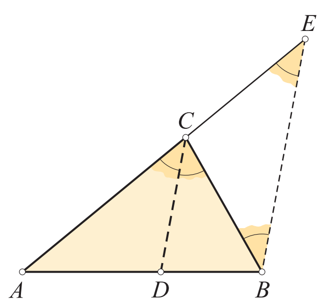
$$\sphericalangle CBE \cong \sphericalangle CEB.$$

Slijedi $|CE| = |CB|$ (E. k. I., prop. 6.) te zbog $CD||BE$ slijedi

$$|CE| : |AC| = |CD| : |EB| \qquad \text{(E. k. VI., prop. 2.).}$$

No kako je $|CE| = |CB|$, onda je

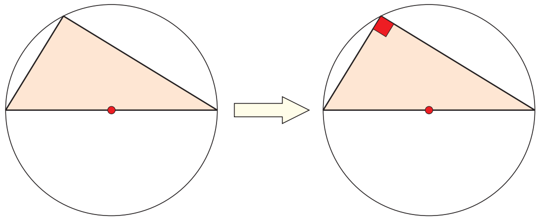
$$|BC| : |AC| = |BD| : |AB| \qquad \text{(E. k. V., prop. 7.).}$$



Neke jednostavnije poučke moglo bi se obraditi i u nastavi matematike. Možemo učenicima ponuditi predložak s nekim od poučaka u Byrneovoj obradi, a njihov zadatak bi bio raspisati dokaz na standardni način, slično kako smo to ovdje učinili u prethodnom primjeru.

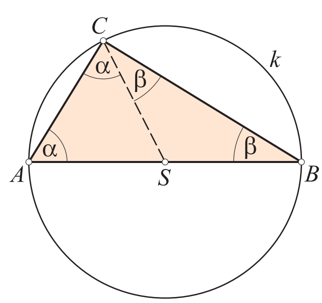
Još nekoliko primjera iz geometrije

Nakon Pitagorina, vjerojatno je Talesov poučak sljedeći po popularnosti. Njegova tvrdnja može se zapisati bez riječi na sljedeći način:



Koja je poruka? Ako središte trokutu opisane kružnice pripada jednoj njegovoj stranici, onda je taj trokut pravokutan s pravim kutom naspram te stranice.

A dokaz? Evo i njega bez riječi:

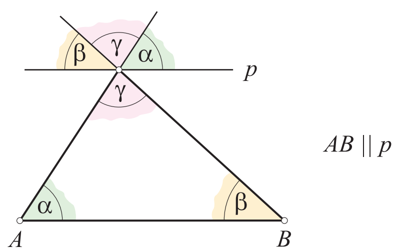


A obrazlažemo: Trokuti $\triangle ASC$ i $\triangle CSB$ su jednakokračni pa je $\sphericalangle ACS = \alpha$ a $\sphericalangle SCB = \beta$ odakle slijedi $\sphericalangle ACB = \alpha + \beta = 90°$.

Na sljedećim sličicama vidimo neke jednostavne poučke elementarne geometrije dane u obliku "dokaza bez riječi". Njihovo tumačenje prepuštamo čitateljima.

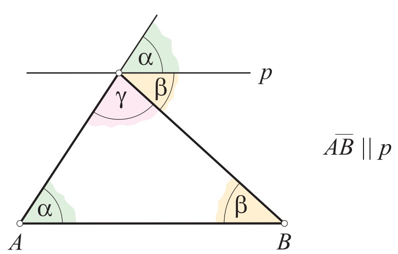
Zbroj kutova u trokutu

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



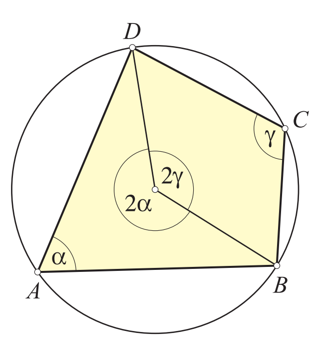
Vanjski kut trokuta

$$\alpha + \beta = \gamma'$$



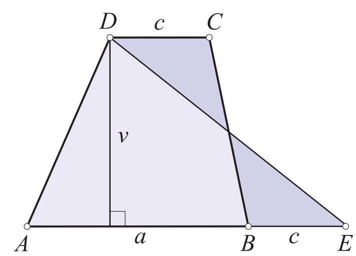
Poučak o tetivnom četverokutu

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$



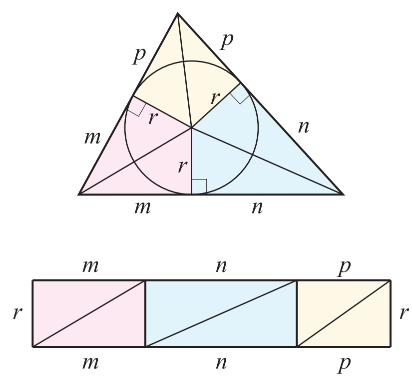
Površina trapeza

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$



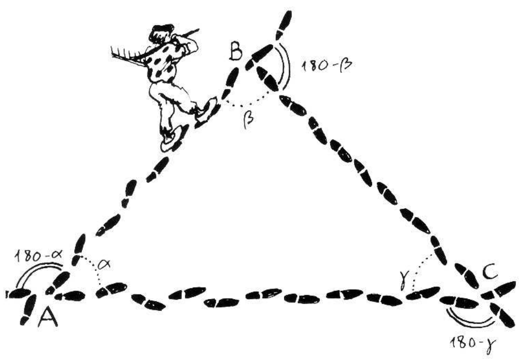
Površina trokuta

$$P = rs$$

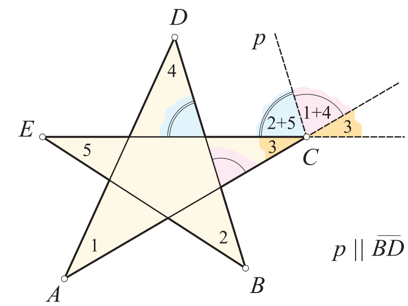


Kad smo već kod tih jednostavnih poučaka vratimo se na trenutak onom prvonavedenom koji govori o zbroju unutarnjih kutova u trokutu. Matematičar i metodičar dr. Boris Pavković rado je navodio "dokaz" za koji je čuo od našeg poznatog matematičara dr. Danila Blanuše. Na priloženoj slici vidimo čovjeka koji hoda po stazi u obliku trokuta[11]. Krenuo je iz vrha A i u istom vrhu će i završiti šetnju. O čemu se radi? Potražite odgovor na ovo pitanje. Prepoznajete li u ovome još jedan duhovit dokaz bez riječi?

[11] Sličica je preuzeta iz [10].

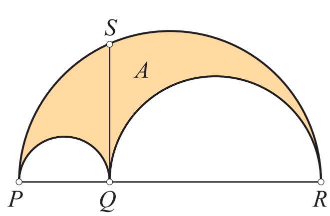


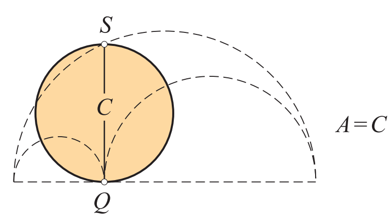
Uz dokaze bez riječi jednostavnih geometrijskih poučaka vrlo su zgodni i vrijedni primjeri rješenja nekih geometrijskih zadataka koji slijede isti trag. U prvom vidimo odgovor na pitanje koliki je zbroj unutarnjih kutova petokrake zvijezde. Promotrite odgovor u kojem se bez riječi dokazuje da je taj zbroj jednak $180°$.



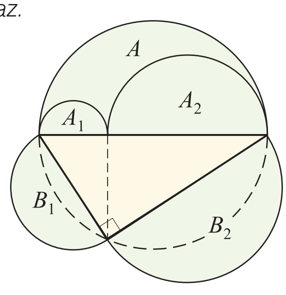
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 180°$$

A evo i prelijepog Nelsenova dokaza poznatog Arhimedova zadatka o "krznarskom nožu" ili arbelosu[12]. Valja dokazati da je površina A krznarskog noža jednaka površini C kruga opisanog nad dužinom QS.

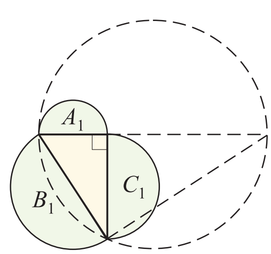




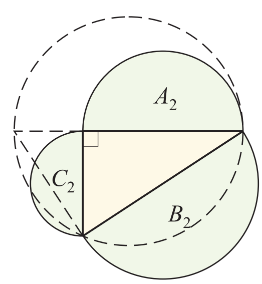
Dokaz.



$$A + A_1 + A_2 = B_1 + B_2$$



$$B_1 = A_1 + C_1$$



$$B_2 = A_2 + C_2$$

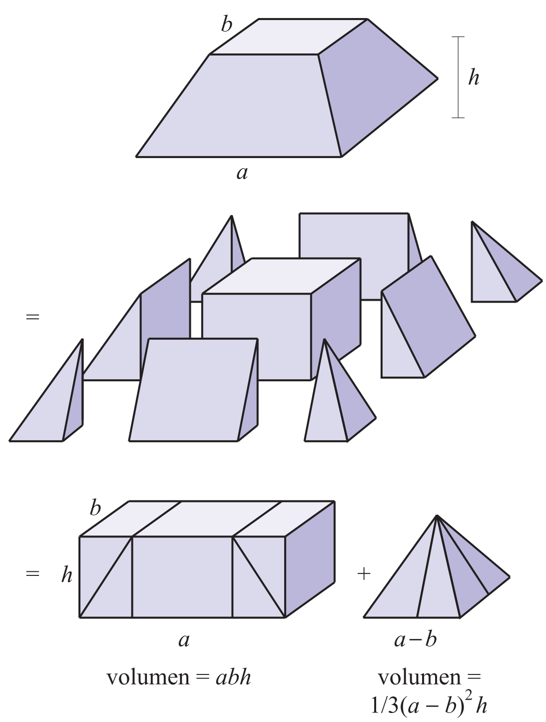
$$A + A_1 + A_2 = A_1 + C_1 + A_2 + C_2$$

$$A = C_1 + C_2 = C$$

[12] V. Arhimedov zadatak o soljenki, MiŠ 43.

No, ovdje valja napomenuti kako razni računalni programi ovakvim dokazima bez riječi dodaju još jednu dimenziju, a to je animacija[13].

Dokazi bez riječi izvedivi su i u geometriji prostora samo što je pritom potrebno imati uistinu dobar zor. Primjer na slici prikazuje (bez riječi) izvod formule za obujam pravilne krnje četverostrane piramide[14].



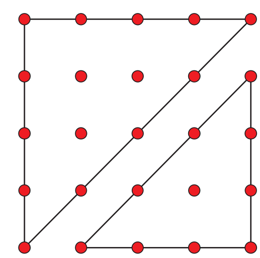
Uočavamo da je

$$V = abh + \frac{1}{3}(a-b)^2 h = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Dokaz bez riječi u algebri

Geometrijsko predočavanje algebarskih tvrdnji osobito je bilo rasprostranjeno u staroj Grčkoj i gotovo da bi se moglo govoriti o izgrađenoj metodi. Primjerice, Nikomah iz Gerase u svojem djelu "Uvod u aritmetiku" (oko 100 g. pr. Kr.) kaže: *Svaki je kvadrat dijagonalom podijeljen u dva trokuta i svaki je kvadratni broj zbroj dvaju uzastopnih trokutnih*. Kvadratni su brojevi cijeli brojevi koji su potpuni kvadrati, a trokutni brojevi su prirodni brojevi oblika $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ova tvrdnja očito povezuje jednostavnu geometrijsku činjenicu s jednim algebarskim svojstvom figurativnih brojeva. Nije li njena istinitost očita?



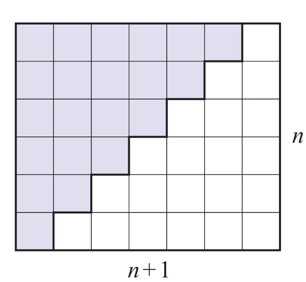
$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}.$$

Ne možemo ovdje propustiti a da ne spomenemo zadatak određivanja zbroja prvih n uzastopnih prirodnih brojeva. Gaussovim postupkom taj se zbroj nalazi na sljedeći način: Sve pribrojnike ispišemo u dva retka ali obrnutim redoslijedom:

$$S = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ldots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + \quad 2 \quad + 1.$$

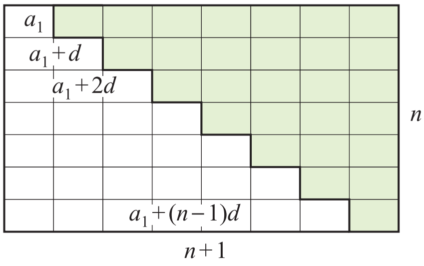
Sada se zbrajaju po dva pribrojnika, jedan iznad drugog i uvijek je zbroj isti, $n+1$. Dakle je $2S = n(n+1)$ i odatle $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ovo rješenje otvara ideju za lijepu i zornu geometrijsku predodžbu, za "dokaz bez riječi". Kvadratić neka bude broj 1 pa će zbroj $1+2+3+\ldots n$ biti predočen u obliku nazubljenog trokuta. Dalje zaključite sami:



[13] V. primjerice www.normala.hr.
[14] Primjer preuzet iz [11].

Sljedeća je slika poopćenje prethodne, ona daje odgovor na pitanje koliki je zbroj prvih n uzastopnih članova aritmetičkog niza.



Vidimo da je taj zbroj jednak

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

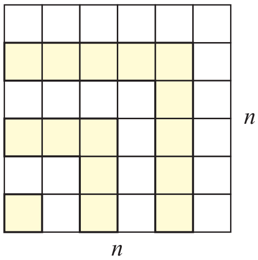
Ujedno primijetite kako se s iste slike može očitati da je opći član aritmetičkog niza čiji je prvi član a_1, a posljednji a_n i čija je razlika (diferencija) jednaka d, jednak

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Navedimo sada bez ikakvog komentara primjer dokaza bez riječi za tvrdnju:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2.$$

Riječima: Zbroj n uzastopnih neparnih prirodnih brojeva jednak je n^2.



$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2.$$

LITERATURA

1/ Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words I*, Exercises in Visual Thinking, Classroom Resource Materials, The Mathematical Association of America, 1993.

2/ Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words II*, More Exercises in Visual Thinking, Classroom Resource Materials/Number I, The Mathematical Association of America.

3/ Alsina Claudio, Nelsen Roger, *Math Made Visual*, MAA 2006.

4/ Theodore Eisenberg, Tommy Dreyfus, *Visuslisationin Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes, Number 19.

5/ Alsina Claudio, Nelsen Roger, *An Invitation to Proofs Without Words*, European Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 3, No 1 (`www.ejpam.com`).

6/ Alsina Claudio, *Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more action*, Modeling and Applications in Mathematics Education, Springer 1997.

7/ `www.normala.hr`

8/ `http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/byrne.html`

9/ Euklid, *Elementi I-VI*, Kruzak, Zagreb, 1999.

10/ Lionel Salem, Frèdèric Testard, Coralie Salem, *The Most Beautiful Mathematical Formulas*, John Waley & Sons, 1992.

11/ Burkard Polster, *Q.E.D., Beauty in Mathematical Proof*, Walker & Comp., 2004.

12/ Steve Thornton, *A Picture is Worth a Thousand Words*, `http://math.unipa.it/~grim/AThornton251.PDF`