

Čitamo graf

Branimir Dakić, Zagreb

Jedan od ciljeva učenja matematike u suvremenoj školi jest osposobljavanje učenika za razumijevanje grafičkih predodžbi raznih društvenih i prirodnih fenomena. Radi se o svojevrsnoj pismenosti neophodnoj za komunikaciju u stručnoj i znanstvenoj zajednici ali i u svakodnevnom građanskom životu.



Osnovno obilježje grafičkih predodžbi jest zornost. Dobro oblikovane, one šalju jasne i sadržajne poruke. Vrlo su često učinkovitije od tekstualnih opisa ili tumačenja. U nastavi matematike osobita se pozornost pridaje grafovima elementarnih relacija i funkcija jer su to jednostavni matematički modeli raznovrsnih realnih situacija. U ovom članku navest ćemo nekoliko primjera koji su vezani uz praktične i životne probleme, a opis im je izražen grafičkim prikazima u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Ocjena toplinske ugone

Internetske stranice Državnog hidrometeorološkog zavoda (www.meteo.hr) bogate su vrlo zanimljivim sadržajem, od svakodневnih meteoroloških podataka i vremenskih prognoza, klimatskih promjena i fenomena pa sve do zgodnih povijesnih citata. Te su stranice jedan od mogućih izvora s kojega nastavnici matematike, ali i ne samo matematike, mogu crpiti građu za potkrjepu školskog gradiva konkretnim i realnim primjerima. One obiluju i raznovrsnim grafičkim predodžbama čije čitanje s razumijevanjem može didaktički biti vrlo učinkovito pri obradi grafičkih prikaza. Upravo su grafovi kak-

ve tu nalazimo vrlo zorni i intuitivni. Evo jednog primjera o osjetu toplinske ugone.

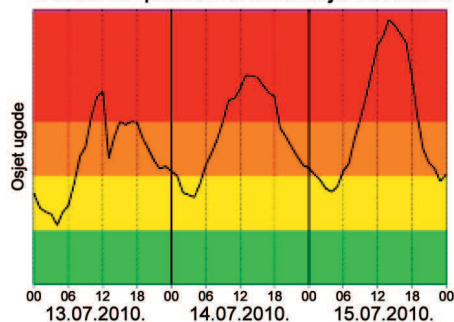
Osjet toplinske ugone neke osobe ovisi o nizu čimbenika od kojih na neke, kao što su izbor odjeće ili fizička aktivnost, možemo utjecati i sami. No tu su i meteorološki uvjeti koji su prirodne pojave, a na njih nemamo utjecaja. To su primjerice vanjska temperatura i vlažnost zraka te jakost vjetra. Upravo su ti meteorološki faktori bitni za ocjenu osjeta toplinske ugone, a ocjene su razvrstane u skalu prema tablici 1.

Napominje se da su ove ocjene predviđene uz uvjet da nismo izravno izloženi sunčanim zrakama i pri laganoj šetnji brzinom od 3.2 km/h.

	Osjet ugone	Preporučena odjeća
4	iznimno vruće	najugodnije bi vam bilo bez odjeće
3	vrlo vruće	odjeće što manje, to bolje!
2	vruće	kratke hlače i košulja kratkih rukava
1	toplo	duge hlače, majica ili košulja
0	ugodno	odijelo
-1	svježe	odijelo i ogrtač ili vjetrovka
-2	hladno	odijelo i kaput
-3	vrlo hladno	zimsko odijelo i zimski kaput
-4	iznimno hladno	višeslojna, nepropusna odjeća

Tablica 1.

Trodnevni prikaz za središnju Hrvatsku



Slika 1.

Osjet toplinske ugone u središnjoj Hrvatskoj svakodnevno je moguće vidjeti na spomenutoj internetskoj adresi. Na slici 1 vidi se kako je to izgledalo za tri uzastopna dana sredinom srpnja 2010. godine.

I sada, nakon ovih uvodnih podataka, možemo učenicima postavljati raznovrsna pitanja na koja će oni odgovarati koristeći se tablicom i grafičkim prikazom. Evo primjerice, nekoliko takvih pitanja:

- 1) Promotrite pažljivo tablicu 1 sa skalom ocjena i grafikon te popunite sljedeću tablicu:

Vrijeme	13.07. 4 h	14.07. 22 h	15.07. 15 h	13.07. 13 h	14.07. 8 h	15.07. 20 h
Osjet toplinske ugone						

Tablica 2.

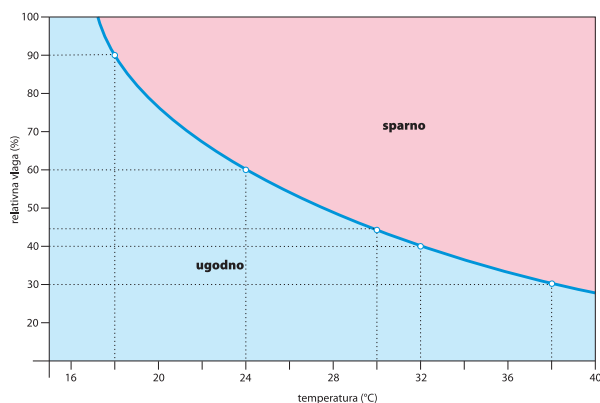
- 2) Ako se pripremate za izlet 13. srpnja od 6 do 18 sati koju ćete odjeću obući?
- 3) Možete li procijeniti u kojem je trenutku tijekom ova tri dana bilo vrlo vruće, a u kojem ugodno?
- 4) Kada je osjećaj toplinske ugone bio na najnižoj granici? Odgovor neka bude unutar intervala od tri sata.

Ovaj primjer je vrlo intuitivan i stoga koristan za uvodnu obradu gradiva o koordinatnom sustavu u ravnini. Pridonosi razumijevanju grafičkih opisa

određenih pojava te je prirodan uvod u složenije i apstraktnije gradivo.

Sparina

I u ovom primjeru zadan je jednostavan grafički opis prirodne pojave. O temperaturi i relativnoj vlažnosti zraka ovisi osjećamo li se ugodno ili ne. Na slici 2. uočljiva je granica između ugodnog i sparnog vremena. Relativna vlažnost izražena je u postocima, a temperatura zraka u stupnjecima Celzijusa.



Slika 2.

Pažljivo promotrite sliku 2 i odgovorite na sljedeća pitanja:

- 1) Je li pri temperaturi 32°C uz relativnu vlagu 50% vrijeme ugodno ili sparno?

- 2) Je li vrijeme sparno ili ugodno ako je relativna vlaga 70% a temperatura 20°C?
- 3) Ako je uz vlagu od 60% vrijeme ugodno, kolika je temperatura zraka?
- 4) Uz koju je relativnu vlagu i temperaturu od 30°C vrijeme sparno?
- 5) Dana 22. srpnja 2010. u 16 sati na sinoptičkoj postaji Daruvar zabilježena je relativna vlažnost zraka od 47%, a temperatura zraka bila je 33°C. Procijenite osjećaj sparine u tom trenutku.

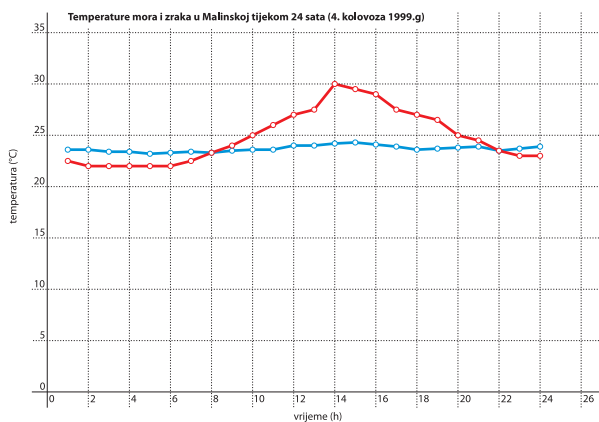
Odgovorima na ova pitanja mogu pridonijeti neke posebno istaknute točke na graničnoj crti između dva područja. To su točke

(18, 90), (24, 60), (30, 45), (32, 40), (38, 30).

Te točke ključ su procjene o kojoj se funkciji radi kad govorimo o granici što razdjeljuje područja ugodnog i sparnog vremena. No o tome će biti riječi u nekom od sljedećih brojeva Miš-a.

Temperature mora i zraka

U koordinatnom sustavu uočavamo dva grafa (slika 3). Crvenom je bojom prikazana promjena temperature zraka, a plavom promjena temperature morske površine tijekom 24 sata u Malinskoj na otoku Krku (izvor: *Geofizički odsjek PMF-a u Zagrebu*).



Slika 3.

Pred učenike valja postaviti zadatak da promotre pažljivo oba grafa i odgovore na sljedeća pitanja:

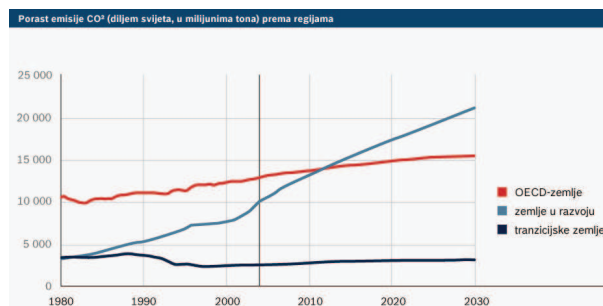
- 1) U koliko je sati temperatura zraka bila najviša? Koliko je iznosila?
- 2) Procijenite u kojem je trenutku temperatura mora bila najviša?
- 3) Jesu li u neko doba temperature mora i zraka bile jednake?
- 4) U koliko je sati razlika temperature mora i temperature zraka bila najveća?
- 5) Odredite intervale u kojima je temperatura zraka bila niža od temperature mora.

Emisija CO₂

Brojne su i nesagledive posljedice povećanja koncentracije ugljičnog dioksida u atmosferi. Najizraženije su: porast prosječne temperature zraka i mora, povećanje morske razine (uslijed otapanja ledenjaka), sve veći broj (s razornim učincima) raznih prirodnih katastrofa kao što su suše, požari i orkani, izumiranje pojedinih biljnih i životinjskih vrsta.

Udio ugljičnog dioksida u atmosferi veći je za oko 30% nego prije 200 godina, a samo u razdoblju od 1975. do 2000. godine taj porast iznosi oko 45%. Posljedica je to naglog povećanja uporabe fosilnih energenata, prije svega nafte. I premda je udio CO₂ u atmosferi posljednjih godina smanjen za nešto manje od 2%, još uvijek je to daleko od poželjnog stanja.

Graf na slici 4 prikazuje porast emisije ugljičnog dioksida od 1980. do danas te s procjenama porasta



Slika 4.

do 2030. godine (u milijunima tona). Promotrite graf i zaokružite točne među sljedećim tvrdnjama:

- 1) Emisija CO₂ u zemljama u razvoju od 2000. do 2010. povećala se za više od 10 milijuna tona.
- 2) U tranzicijskim zemljama u sljedećih 20 godina ne očekuje se značajniji rast emisije CO₂.
- 3) U posljednjih 10 godina (od 2000. do 2010.) emisija CO₂ u zemljama OECD-a povećana je za više od 10%.
- 4) Zemlje u razvoju godine 2010. po porastu emisije CO₂ nadmašit će zemlje OECD-a.
- 5) Od 1990. do 2010. povećanje emisije CO₂ u zemljama u razvoju veće je od 100%.
- 6) Porast emisije CO₂ od 2012. godine u zemljama u razvoju količinski će prijeći porast u zemljama OECD-a (približno).

Dolar i euro

U ovom primjeru iskoristili smo graf objavljen 5. svibnja 2010. u jednom dnevnom novinama prigodom gotovo dramatičnog pada vrijednosti eura prema američkom dolaru zbog financijske krize koja je zadesila Zapadnu Europu.

Graf na slici 5 prikazuje omjer ovih dviju valuta tijekom 10 godina, od 1999. godine do danas. Važno je uočiti da je omjer nastao povezivanjem nekih njegovih ključnih trenutaka. Poveznice su uglavnom dužine što je vjerojatno svjesno zanemarivanje nelinearnog ponašanja omjera dviju valuta u pojedinim većim vremenskim intervalima. U svrhu jasnijeg isčitavanja to nije rijedak slučaj kad se radi



Slika 5. Izvor: *Jutarnji list*, 05. 05. 2010.

o grubim analizama s ciljem da informacija bude primjerenija širokoj čitateljskoj populaciji.

Cilj zadatka koji postavljamo učenicima jest: čitanje grafa. Valja promotriti dani graf i zaokružiti točne tvrdnje:

- 1) Najniža vrijednost dolara prema euru zabilježena je početkom 2002. godine.
- 2) Euro je 2007. godine bio u stalnom rastu prema dolaru.
- 3) U prvoj polovini 1999. godini euro je prema dolaru bio u stalnom rastu.
- 4) U ožujku 2004. vrijednost eura je rasla i kretala se unutar intervala između 1.2 i 1.4 dolara za euro.
- 5) Krajem 2000. godine euro je vrijedio više od dolara.
- 6) Najviši omjer eura i dolara u navedenom razdoblju bio je sredinom 2008. godine.

Dva biciklista

Evo sada malo složenijeg ali zanimljivog zadatka na zadanu temu. Dani graf prikazuje međusobnu udaljenost dvaju biciklista tijekom 6 minuta vožnje pri čemu se oni kreću ravnom cestom u suprotnim smjerovima jedan prema drugome. Varijabla t je vrijeme (u minutama), a s je međusobna udaljenost (u metrima) dvaju biciklista u nekom trenutku unutar promatranog vremenskog intervala.

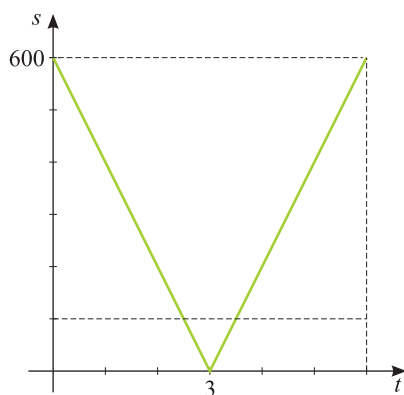
Primijetimo da se udaljenost mijenja linearno što ništa ne govori o brzini kretanja dvaju biciklista.

Evo i samog zadatka:

Promotrite pažljivo dani graf sa slike 6 i opišite riječima kako se mijenja udaljenost dvaju biciklista tijekom 6 minuta od promatranog trenutka. Zapišite udaljenost s kao funkciju od t .

Odgovorite potom i na sljedeća pitanja:

- 1) Nakon koliko su se vremena biciklisti susreli?
- 2) Kada su, nakon što su se mimoišli, bili udaljeni točno 400 metara?



Slika 6.

- 3) U kojem su vremenskom intervalu bili udaljeni manje od 100 m?

U početku promatranja biciklisti su udaljeni 600 m i voze jedan prema drugome (dakle u suprotnim smjerovima). Njihova se međusobna udaljenost smanjuje i nakon 3 minute oni se susretnu. Potom se udaljuju da bi nakon 6 minuta vožnje njihova udaljenost ponovo bila 600 m. Zaključit ćemo da promjenu udaljenosti s ovisno o vremenu t opisuje funkcija

$$s(t) = 200|t - 3|.$$

- 1) Već smo zaključili da su se biciklisti susreli nakon 3 minute. To je zapravo rješenje jednadžbe $s = 0$.
- 2) Mogli bismo ovako zaključivati: Promjena udaljenosti biciklista je linearna. To znači, ako se za 3 minute njihova udaljenost smanjila za 600 metara, onda je za svako približavanje od 100 metara

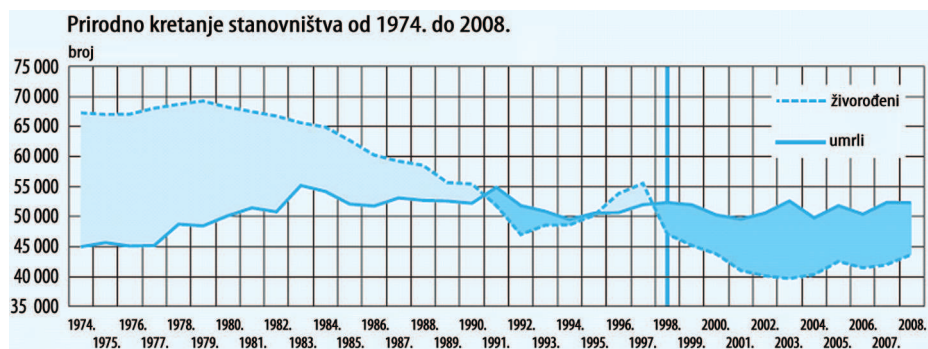
potrebno pola minute. Da bi bili udaljeni 400 metara nakon mimoilaženja treba im 2 minute. Dakle, od početka promatranja pa do udaljenosti biciklista 400 m nakon njihova susreta, proći će 5 minuta.

Jasno, možemo postupiti i formalno pa rješavati jednadžbu $s(t) = 400$. Tada ćemo dobiti $|t - 3| = 2$, odakle je $t = 1$ ili $t = 5$. Prvo rješenje odbacujemo jer ono kaže da je udaljenost biciklista pri njihovom približavanju bila 400 m nakon 1 minute.

- 3) I na ovo pitanje moguće je odgovoriti jednostavnim zaključivanjem a do rezultata se može doći rješavanjem nejednadžbe $|t - 3| < \frac{1}{2}$. Dobijemo da je $\frac{5}{2} < t < \frac{7}{2}$ što znači da su biciklisti udaljeni manje od 100 metara u intervalu od 2.5 do 3.5 minute.

Prirodno kretanje stanovništva

Promjene brojnosti stanovništva, a posebno uspoređivanje brojeva živorođenih i umrlih, vrlo se pažljivo prate u svakoj državi. Evo jednog grafičkog prikaza prirodnog kretanja stanovništva u Hrvatskoj od 1974. do 2008. Preuzet je iz Statističkog ljetopisa Državnog zavoda za statistiku za 2009. godinu. Možemo ga kao predložak postaviti pred učenike i zadati im da s ovog grafa iščitaju sve što misle da on iskazuje. Primjer je pogodan za rad u skupinama nakon kojeg se može razviti rasprava.



Slika 7.