Padovanov niz i plastična konstanta

Branimir Dakić, Zagreb

Ima li zanimljivije i popularnije matematičke teme nego li su Fibonaccijevi brojevi? Izrasli na jednom jednostavnom problemčiću o razmnožavanju zečeva što ga je talijanski matematičar Leonardo iz Pise, Fibonacci, 1202. godine objavio u svojoj povijesnoj knjizi *Liber abaci* ovi su brojevi bili tek početak brojnih izučavanja koja su uslijedila, osobito tijekom posljednjih desetljeća.

Fibonaccijevi brojevi članovi su niza koji je zadan sljedećom rekurzivnom formulom:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad a_1 = a_2 = 1.$$

Riječ je dakle o nizu

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

čiji je svaki član, počevši s trećim, zbroj dvaju koji mu neposredno prethode. Promatraju li se omjeri $a_n : a_{n+1}$ po dva susjedna člana Fibonaccijeva niza, dobit će se niz racionalnih brojeva

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots$$

s graničnom vrijednošću

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803398875\ldots,$$

brojem koji je općepoznat kao **zlatni omjer**. Tim je omjerom neka dužina podijeljena na dva dijela i kažemo da je djelište njezin **zlatni (pre)rez**. O tome kakvu ulogu zlatni omjer ima u prirodi ili u umjetnosti dovoljno je pisano i u MiŠ-u, a i internetski sadržaji na tu temu vrlo su brojni i bogati.

Zar je čudno što su se matematičari, ali ne i samo oni, potaknuti silnom popularnošću Fibonaccijeva niza, upitali o njegovim mogućim analogijama? Možda bi slično zadan niz doveo do zanimljivih činjenica, možda bi potaknuo neko zanimljivo geometrijsko tumačenje.

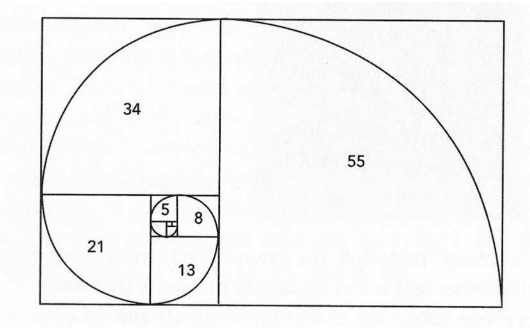
Takvo je razmišljanje dovelo do promatranja jednog novog niza koji je zadan na ovaj način:

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Evo prvih nekoliko članova toga niza:

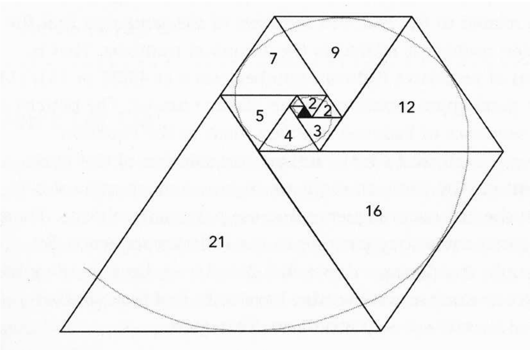
$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \ldots$$

Poznati engleski matematičar, popularizator matematike i pedagog, Ian Stewart, niz je nazvao Padovanovim u znak priznanja arhitektu Richardu Padovanu (1935. –) koji se bavio tim nizom i njegovim primjenama u arhitekturi. Sam je Padovan međutim niz pripisao nizozemskom svećeniku i graditelju Hansu van der Laanu (1904. – 1991.). Spomenimo kako je niz zadan istom rekurzivnom jednadžbom ali s drugim početnim uvjetima ($a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$), poznat kao Perrinov niz, još davne 1876. o njemu je zabilježen jedan rad Edouarda Lucasa.



Sl. 1.

Poznata je geometrijska konstrukcija u kojoj se slažu kvadrati čije su stranice uzastopni članovi Fibonaccijeva niza (slika 1) pri čemu svakim novim docrtavanjem nastaje zlatni pravokutnik. Krivulja koja se potom dobije kao skup kružnih lukova iscrtanih, kako se to vidi na slici, približna je logaritamskoj spirali. Sličan se postupak može provesti i nizanjem jednakostraničnih trokuta čije su stranice uzastopni članovi Padovanova niza pa se i ovdje može crtati spirala onako kako vidimo na slici 2.



Sl. 2.

Van der Laan je promatrao omjere dvaju susjednih članova Padovanova niza i tako dobio niz racionalnih brojeva za koji se ustanovilo kako teži broju

$$\rho = 1.32471795724474602596090885 4\ldots$$

Primijetimo da je ta konvergencija znatno sporija nego u slučaju broja τ. Broj ρ nazvan je **plastični broj** ili **plastična konstanta**. Ponekad se on zove **srebrna konstanta** ili srebrni omjer, ali to nije najsretnije rješenje s obzirom da je to ime već ranije zauzeto za broj $1+\sqrt{2}$.

Plastični je broj jedino realno rješenje kubne jednadžbe

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Njegov je točan zapis

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}.$$

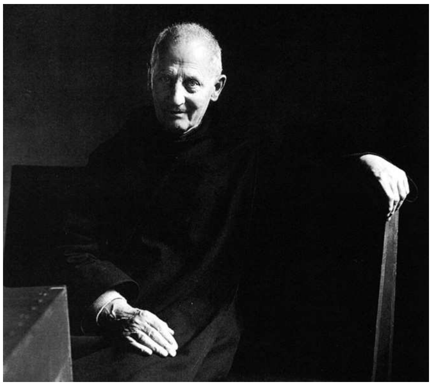
Poznat je i njegov raspis u verižni razlomak:

$$\rho = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

a zanimljiv je i ovaj njegov zapis:

$$\rho = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \ldots.}}}$$

No vratimo se Nizozemcu Van der Laanu kojem valja pripisati ime ovog broja. Rođen je u Leidenu, studirao je arhitekturu u Delftu, čuvenom nizozemskom gradu umjestnosti. Godine 1927. zaredio se i postao svećenikom te je službovao u opatijama



Sl. 3. Van der Laan

Sl. 4.

Sl. 5.

u Oosterhutu i Vaalsu. Bavio se projektiranjem crkvenih građevina, ali i obiteljskih kuća, koristeći u svojem radu proporcije zasnovane na plastičnom broju. Najilustrativniji primjer u tom smislu je njegov projekt untrašnjosti opatije sv. Benedikta.

I na kraju dodajmo: svakako da plastična konstanta i zlatni broj nisu ravnopravni govorimo li o njihovoj popularnosti. No i ovaj prvi zaslužuje pozornost pa bi ovaj mali prikaz mogao biti poticajem za samostalan istraživalački rad učenika koji pokazuju zanimanje za umjetnost, posebice za arhitekturu.

Le Corbusier (1887. – 1965.), francuski arhitekt svjetskog glasa, u opsežnom djelu pod nazivom *Le Modulor* potanko je izložio svoju graditeljsku teoriju zasnovanu na analizama stoljetnih povijesnih iskustava velikana arhitekture. Skala proporcionalnosti koju on zastupa izrađena je po uzoru na čuvenog Da Vincijeva *Vitruvija*. S jedne strane ona mu je bila osnovica za njegove projekte, a s druge, trebala je povezati tzv. imperijalni i decimalni sustav mjera za duljinu.

Prvotno je Le Corbusierov čovjek bio prosječan Francuz, visok 1.75 m. Kasnije je tu visinu promijenio pa je visina čovjeka podignuta na 6 stopa (1.8288 m), a zajedno s podignutom rukom na 2.26 m. Zanimljivo je kako je ova promjena uslijedila zbog toga što su u engleskim detektivskim romanima svi pristali muškarci, kakvi su primjerice policajci, visoki oko 6 stopa.

Visina pupka od podnoža Le Corbusierova čovjeka jednaka je 1.13 m, pa vidimo da je visina cijele figure dvostruko veća. Iz ovoga se razabire da je Le Corbusier prihvatio zlatni rez kao osnovnu proporciju koju valja poštovati u graditeljskim projektima.

U prvoj knjizi (*Le Modulor*) Le Corbusier je čitavo jedno poglavlje posvetio prikazu primjene opisanih proporcija na stambenu zgradu u Marseillesu (na slici).

Ovaj je mali prikaz nadopuna članka o plastičnom broju, ali i dodatak vrlo čestoj i popularnoj temi zlatnog reza za kojom se često poseže kako bi se na jednom lijepom primjeru ilustrirala bliskost matematike s umjetnošću.