Otvoreni pristup
u nastavi matematike

Branimir Dakić, Zagreb

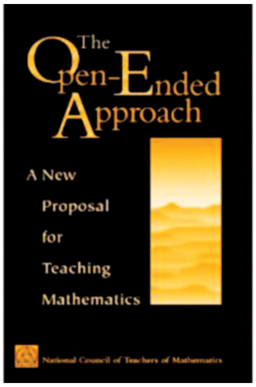
Obrazovni je sustav općenito konzervativan dio društva. Trom je, teško se mijenja i uglavnom ne ide ukorak s nekim drugim, bržim promjenama na kakve nailazimo primjerice u područjima tehnike i tehnologija, osobito u razvijenim modernim dinamičnim društvima. U njima se osjeća jak pritisak na školstvo sa zahtjevom za bržom i učinkovitijom prilagodbom novim okolnostima. Dakako, matematičko obrazovanje, bez kojega je danas nemoguće zamisliti bilo kakvu ozbiljnu djelatnost, osobito istraživalačku i znanstvenu, pod posebnom je lupom i pred njega se postavljaju izrazito zahtjevni ciljevi.

Unatrag nekoliko desetljeća glavnu riječ u matematičkom obrazovanju u svijetu imale su razvijene zemlje Zapadne Europe, još jučer najjači utjecaj dopirao je iz Sjeverne Amerike (SAD-a i Kanade), a čini se kako se danas sve više osluškuje puls Dalekog istoka gdje su velika privredna razvijenost i gospodarski napredak u jakoj ekspanziji. Poznat je ekonomski fenomen "azijskih tigrova" a moglo bi se uskoro govoriti o fenomenu "azijskih lavova" u obrazovanju. Naime, dalekoistočne su zemlje posljednjih godina najuspješnije u planetarnim provjerama matematičke pismenosti, a iz njih dolaze i najuspješniji natjecatelji na olimpijadi mladih matematičara. Te zemlje sustavno skrbe o svojem obrazovanju općenito, provode znanstveno temeljena istraživanja čiji se rezultati ugrađuju u školsku praksu. U ovom članku bit će riječi o jednom suvremenom didaktičkom pristupu nastavi matematike koji je zasnovan i razrađen u Japanu a danas se prihvaća diljem svijeta. Moglo bi se reći kako se radi o svojevrsnoj nadogradnji i razradi istaknutog didaktičkog načela poznatog kao ***problemska nastava*** u kojoj se znanja usvajaju rješavanjem učinkovitih i osmišljenih zadataka.

U razdoblju od 1971. do 1976. u Japanu je provedeno više vladinih istraživalačkih projekata koji su imali za cilj vrednovati učinke pojedinih didaktičkih postupaka u nastavi matematike. Jedan takav projekt promovirao je ***Otvoreni pristup učenju matema-***

tike,[1] pristup utemeljen prije svega na rješavanju ***zadataka otvorenog tipa***[2]. Matematičar Shigeru Shimada iz japanskog Nacionalnog instituta za školstvo vodio je projekt za praćenje učinaka ovih novih postupaka. Prije svega tragalo se za odgovorom na pitanje u kojoj je mjeri taj novi pristup utjecao na razvitak matematičkog mišljenja te na sposobnosti učinkovite primjene matematike u raznovrsnim praktičnim situacijama. U predgovoru knjizi u kojoj je opisan projekt i navedeni njegovi rezultati piše:

— *Kako je istraživanje napredovalo, postajali smo sve uvjereniji da učenje na osnovi rješavanja problema otvorenog tipa ima velik potencijal za unapređenje poučavanja i učenja.*



Ista je knjiga 1997. prevedena i na engleski jezik[3] te je odmah naišla na snažan odjek prije svega u Sjedinjenim Američkim Državama. U izdanju NCTM-a (*The National Council of Teachers of Mathematics*), najveće američke i svjetske udruge nastavnika matematike, ona je doživjela sedam izdanja. Ta je knjiga bila i temeljni oslonac autoru ovog članka. Iz nje je pored nekoliko izvornih navoda preuzeta i većina primjera kako bi se čitatelju predočili autentični problemi i po sadržaju i po njihovoj složenosti.

Napomenimo da je novi japanski obrazovni kurikulum, koji je stupio na snagu 2002. za osnovne i 2003. za srednje škole, kao aksiom postavio zahtjev za novim, **otvorenim**, pristupom nastavi matematike. Ujedno je japansko Ministarstvo prosvjete propisalo da se udžbenici matematike imaju neodložno uskladiti s kurikulumom te da sve škole moraju koristiti samo odobrene udžbenike. Od nastavnika se traži da strogo slijede udžbenik. Tijekom vremena, nastavnici matematike u Japanu stvorili su veliku zalihu problema otvorenog tipa i njihovih didaktičkih obrada.

Što podrazumijeva "otvoreni pristup"?

Najbolje je da odgovor na ovo glavno pitanje dade sam Shigeru Shimada. On kaže:

— *Tradicionalni problemi primjenjivani u nastavi matematike i u osnovnoj i u srednjoj školi imaju jednu zajedničku značajku: predodređen je jedan i samo jedan točan odgovor. Problemi su toliko dobro formulirani da je odgovor ili točan, ili netočan, a točan može biti samo jedan. To su "potpuni" ili "zatvoreni" problemi.*

I nastavlja:

— *Probleme koji su formulirani tako da imaju više točnih odgovora zovemo* ***nepotpuni*** *ili* ***otvoreni*** *problemi. Jednostavno je naći brojne primjere. U tradicionalnoj nastavi, kada se od učenika zahtijeva da se usredotoče na razvitak različitih metoda, načina ili pristupa rješavanju danog problema, a ne na nalaženje samog rješenja, učenici su na neki način suočeni s otvorenim problemom. Jer ono glavno što se traži nije odgovor na sam problem već postupak za nalaženje rješenja. Pritom nemamo samo jedan pristup već više ili mnogo njih. Međutim, ta "otvorenost" se gubi ako nastavnik postupa tako kao da postoji samo jedna točna metoda rješavanja.*

Opisujući zamisao otvorenog pristupa u nastavi matematike Toshio Sawada, sudionik projekta i također istraživač u japanskom Nacionalnom institutu za školstvo, kaže kako *učitelj postavlja pred učenike problemsku situaciju čija rješenja ili odgovori nisu nužno odredivi na samo jedan način. On dakle ukazuje na raznolikost pristupa problemu kako bi kod učenika razvio iskustvo u nalaženju ili otkrivanju novih činjenica kombinirajući ranije usvojeno cjelokupno znanje, vještine i matematički način mišljenja.*

Sawada navodi neke prednosti koje pruža otvoreni pristup u nastavi matematike.

---

[1] engl. *The open-ended approach*
[2] engl. *The open-ended problem*
[3] Becker P. Jerry, Shimada Shigeru, *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*, NCTM 2007 (7. izdanje).

1. Učenici sudjeluju aktivnije u obradi gradiva te učestalije iskazuju svoje zamisli.
2. Učenici imaju više mogućnosti za obuhvatniju uporabu svojih matematičkih znanja i vještina.
3. Čak i učenici slabijih dostignuća mogu reagirati na problem na neke svoje osobite načine.
4. Učenici su prirodno potaknuti za obrazlaganje tvrdnji.
5. Učenici stječu bogato iskustvo kroz zadovoljstvo otkrića i priznanje njihovih kolega.

No istovremeno Sawada je svjestan i nedostataka:

1. Nije jednostavno pripremiti smislene matematičke problemske situacije.
2. Nastavniku nije uvijek lako uspješno predočiti sam problem. Učenici ponekad imaju teškoća razumjeti kako reagirati i daju odgovore koji su matematički beznačajni.
3. Najsposobniji bi učenici mogli osjetiti nelagodu zbog svojih odgovora.
4. Učenici bi mogli pomisliti da je njihovo napredovanje nezadovoljavajuće zbog toga što nisu u stanju objediniti sve što se izlaže.

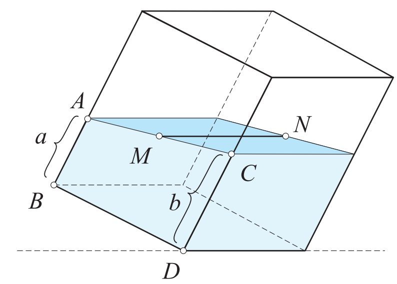
Nedostaci će se umanjiti raspravi li se potanko svaka nedoumica ili nejasnoća vezana uz samo razumijevanje problema. Nastavnik će nizom pitanja i potpitanja poticati stjecanje navike učenika da je od samog rezultata važnija analiza problema i metoda njegova rješavanja. To neće činiti izravno ili sugestivno, već općenitije, kao: "Što je razlog da ste se odlučili za ovaj postupak?", "Opišite, kako ste došli do rješenja?" i sl.

Konačno rezimirajmo: Problem otvorenog tipa je problem za koji u trenutku postavljanja nije izvjestan postupak njegova rješavanja, koji može imati više raznih načina rješavanja i koji može imati više različitih i točnih rješenja.

Jedan tipičan primjer

Kako bi primjerom ilustrirao što se podrazumijeva pod problemom otvorenog tipa, istraživač Yoshihiko Hashimoto navodi sljedeći problem:

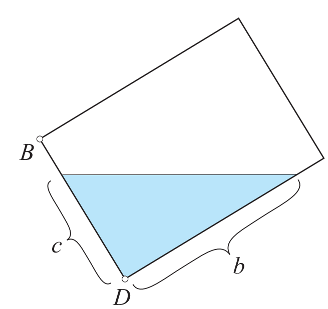
U prozirnoj posudi koja ima oblik kvadra nalazi se voda. Kad se posuda postavi na vodoravnu ravninu tako da je jedan njezin brid u toj ravnini, tada tijelo koje je dio prizme ispod površine vode može poprimiti različite oblike čija površina varira.



Pokušajte otkriti neke invarijantne relacije koje se odnose na moguć oblik i veličinu ovakvog tijela. Ispišite sve vaše zaključke.

Hashimoto navodi nekoliko mogućih odgovora:

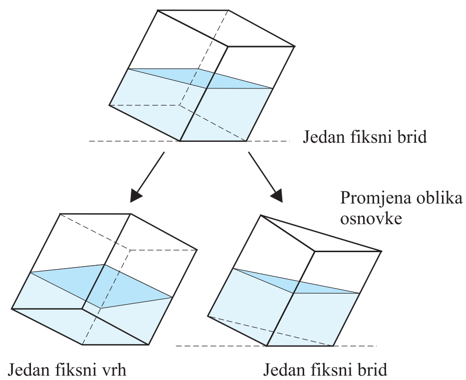
1. Neka su a i b duljine bridova okomitih na osnovku. Tada je zbroj $a+b$ stalan.
2. Polovište M dužine $\overline{AC}$ je fiksna točka i spojnica točke M s polovištem N stranice nasuprot $\overline{AC}$ je fiksna.
3. Ukupna površina strana posude koje su ispod površine vode je nepromjenjiva.
4. Ako uvedemo oznake kao na donjoj slici, tada je umnožak $b \cdot c$ stalan.



5. Površina vode ima oblik pravokutnika.

Zašto je ovo problem otvorenog tipa? Valja uočiti da je formuliran tako da dopušta više točnih odgovora. S druge strane potpuno je otvoreno pitanje obrazloženja pojedinih zaključaka. Nastavnik mora za pojedine odgovore tražiti argumentaciju.

Ovako prezentiran problem posude predviđen je za obradu u osnovnoj školi. U nižoj srednjoj školi međutim on se može proširiti i postaviti bez ikakvih ograničenja. A u višim razredima srednje škole problem se "zaoštrava" ispuštanjem uvjeta da je prizma četverostrana i da jedan njezin osnovni brid leži u horizontalnoj ravnini. Dakle, od prvotno postavljenog zadatka moguća su poopćenja u dva smjera, onako kako je to vidljivo sa sljedeće slike.



Vrste problema

U istraživanju japanskih matematičara problemi otvorenog tipa klasificiraju se u nekoliko vrsta, pri čemu ta klasifikacija nije neka posebnost svojstvena samo problemima otvorenog tipa. Prikažimo nekoliko primjera.

Nalaženje odnosa

Pred učenike se postavlja zadatak određivanja određenih matematičkih odnosa ili pravila. Najčešće je riječ o tome da se analizira određena skupina podataka na temelju čije se analize izvedu određeni relevantni zaključci.

Navedimo primjer.

Dana tablica na dnu stranice prikazuje učinkovitost pojedinih igrača momčadi Splita na jednoj košarkaškoj utakmici u najjačem hrvatskom natjecateljskom razredu. Momčad Splita pobijedila je u toj utakmici rezultatom 101 : 79.

	min	koš	uk/šut		za 2	za 3	sl.b	as	iz	bl	so+sn
Toni	36:00	25	9/11	81%	9/11	0/0	7/9	6	3	0	4 + 0
Luka	09:00	2	1/3	33%	1/3	0/0	0/0	2	2	0	1 + 0
Josip	19:00	10	5/7	71%	5/7	0/0	0/2	2	3	0	3 + 4
Ante	25:00	6	2/3	66%	0/0	2/3	0/0	4	3	0	4 + 0
Ivan	33:00	31	10/13	76%	6/8	4/5	7/7	3	3	0	3 + 0
Srđan	18:00	9	3/5	60%	0/1	3/4	0/0	1	2	0	0 + 0
Roko	00:00	0									
Tonko	22:00	6	2/3	66%	2/3	0/0	2/3	5	0	0	3 + 1
Bruno	03:00	0	0/0	0%	0/0	0/0	0/0	0	1	0	0 + 0
Stipe	18:00	6	1/4	25%	1/1	9/3	0/3	0	2	1	3 + 0
Filip	14:00	6	3/5	60%	3/5	0/0	0/0	0	0	0	3 + 0
Jole	03:00	0	0/0	0%	0/0	0/0	0/0	1	0	0	1 + 0
Uk.→	**200:00**	**101**	**36/54**	**67%**	**27/39**	**9/15**	**20/27**	**24**	**19**	**1**	**25 + 5**

Oznake u tablici: min (vrijeme koje je igrač proveo u igri), koš (ukupan broj postignutih koševa), uk/šut (koševi postignuti iz igre), za 2 (šut za dvicu), za 3 (šut za tricu), sl. b (broj koševa postignutih iz slobodnih bacanja), as (broj asistencija), iz (broj izgubljenih lopti), bl (blokade), so+sn (skok u obrani + skok u napadu)

Nakon predočenja tablice i njezina objašnjenja može se postaviti čitav niz pitanja. Primjerice:

— Koji je igrač najviše pridonio pobjedi svoje momčadi u ovom susretu?

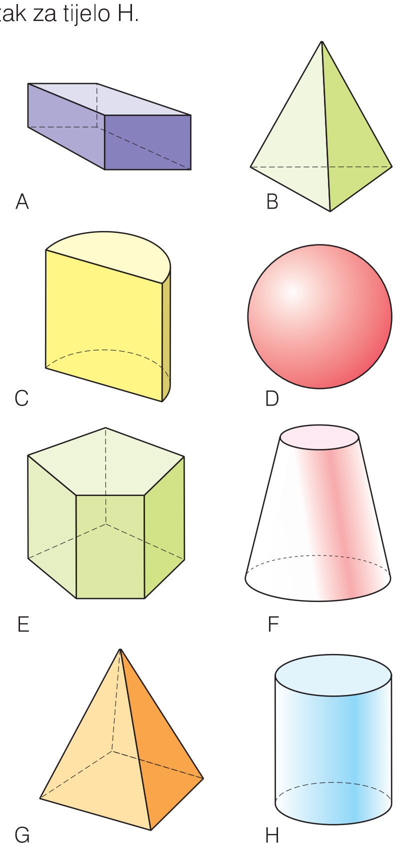
— Načinite tablicu pet najuspješnijih košarkaša uspoređujući uspješnost u pojedinim elementima igre.

— Koja su tri elementa igre najviše utjecala na rezultat?

Klasificiranje

Zadaje se problem koji zahtijeva razvrstavanje po nekim specifičnim karakteristikama što bi moglo voditi prema određenim matematičkim konceptima.

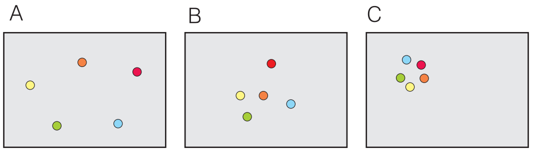
Na slici je prikazano više geometrijskih tijela. Koja među njima imaju neku zajedničku osobinu s tijelom pod B? Koja je to osobina? Zatim ponovite isti zadatak za tijelo H.



Mjerenje

U ovoj vrsti problema otvorenog tipa od učenika se zahtijeva numerički opis nekog fenomena. Dakle ne misli se na standardno mjerenje već na osmišljavanje numeričkog modela. U tom je smislu vrlo neobičan i zanimljiv sljedeći primjer:

Svaki od trojice suigrača, A, B i C bacio je na ravnu podlogu pet kuglica koje su se smirile onako kako je prikazano na slikama. Pobjednik u ovoj igri je onaj čije su se kuglice najmanje raspršile. Čini se kako stupanj raspršenosti opada redom za A, B i C. Izmislite što više načina kojima se može numeričkim putem izraziti stupanj raspršenosti.



Kakvi se odgovori i rješenja uopće mogu očekivati? Koji bi kriterij mogao određivati pobjednika igre? Moglo bi se rješenje tražiti:

— mjerenjem opsega poligonalne crte;

— mjerenjem površine poligona;

— zbrajanjem duljine svih dužina koje spajaju po dvije od pet točaka;

— metodom koordinata;

— određivanjem polumjera najmanje kružnice u kojoj su smještene sve točke; itd.

Zatvoreno pretvoriti u otvoreno

Vrlo često se standardni "zatvoreni" problemi mogu preoblikovati u probleme otvorenog tipa. Tako se uz prethodno naveden primjer geometrijskih tijela uobičajeno pita:

Koja su od danih tijela piramide? Izdvoji iz te skupine valjke. Koja su među tijelima rotacijska? Za koja od ovih tijela su svi presjeci ravninama paralelnim s bazom međusobno sukladni? Itd.

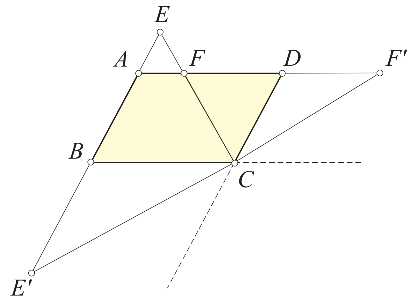
Sva ta pitanja su "zatvorena" a problem se vrlo lako može "otvoriti" i postaviti onako kako je to u navedenom primjeru.

Evo još jednog primjera:

Dan je paralelogram $ABCD$. Pravac BE, simetrala unutarnjeg kuta ABC tog paralelograma, siječe pravac AD u točki E. Tada je $|AE| = ||AD| - |AB||$. Dokažite!

Ovako formuliran, zadatak je zatvorenog tipa, ali vrlo lako može se preoblikovati u problem otvorenog tipa:

Pravac CE simetrala je unutarnjeg, a pravac $E'F'$ vanjskog kuta paralelograma $ABCD$. Možete li odrediti neku relaciju između dužina, kutova i trokuta na slici?



I navedimo još jedan primjer:

Dane su realne funkcije:

(a) $f(x) = \frac{2}{5}x$; (b) $f(x) = \frac{2}{5}x^2$;

(c) $f(x) = \frac{2}{5}x^3$; (d) $f(x) = -\frac{2}{5}x$;

(e) $f(x) = -\frac{2}{5}x^2$; (f) $f(x) = -\frac{2}{5}x^3$.

Koje su među njima rastuće? Koje su parne? Odredite skup vrijednosti za svaku od sljedećih funkcija. Prikažite dane funkcije grafički.

Ovako postavljen zadatak jest "zatvoren". Postavljenim pitanjima izravno se provjerava usvojenost određenih definicija i činjenica i sasvim je jasno kako će se to provesti. Odgovori su jednoznačni i oko njih se nema što raspravljati.

Međutim, sam zadatak može se preoblikovati u "otvoreni". Jednostavno ćemo niz pitanja zamijeniti sa: Ispiši što je više moguće zajedničkih svojstava što ih imaju dvije ili više danih funkcija.

Organizacija rada

Sama organizacija rada na rješavanju problema otvorenog tipa ne razlikuje se bitno od one koja je uobičajena kod grupnog rada.
Tri su osnovne etape.

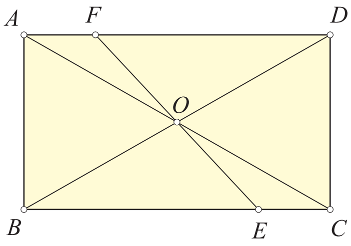
Prva: Nastavnik izlaže pripremljeni problem. Učenici postavljaju pitanja i svojim komentarima pridonose njegovu razjašnjavanju i razumijevanju. Svaki učenik zatim zapisuje svoju ideju za rješavanje. Nastavnik zatim prikuplja zabilješke, letimice ih pregleda i formira radne grupe od četiri učenika.

Druga: Učenici rade u grupama.

Treća: Prezentiraju se radovi pojedinih grupa, obrazlažu metode rješavanja, uspoređuju rezultati. Slijedi rasprava nakon koje se iskristalizira konačan cjelovit odgovor na postavljeni problem.

Još nekoliko primjera

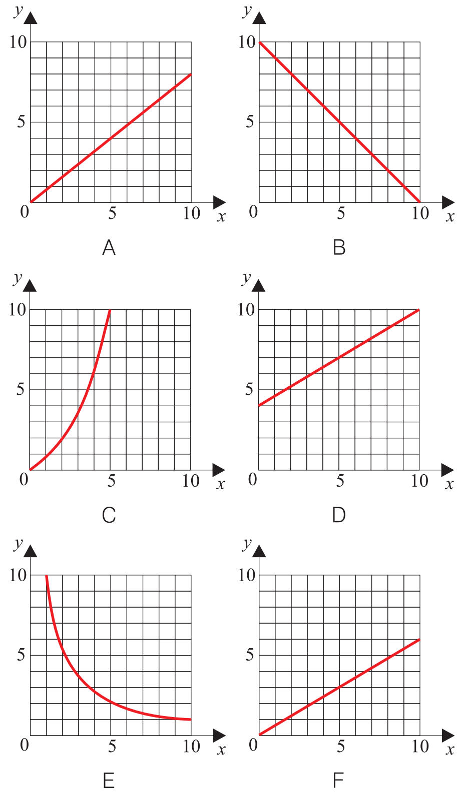
1) Dan je pravokutnik $ABCD$. Pravac EF prolazi sjecištem dijagonala pravokutnika.



   (a) Nađite što je više moguće različitih geometrijskih likova na slici.
   (b) Odaberite neka dva od nađenih likova i pokušajte ih usporediti. Uočavate li neko pravilo koje se odnosi na njihovu veličinu ili položaj?

2) Konstruirajte pravokutnik čije su dimenzije (duljina i širina) dvostruko veće od dimenzija zadanog pravokutnika. Pokušajte to provesti na što više različitih načina. Opišite riječima svoje postupke.

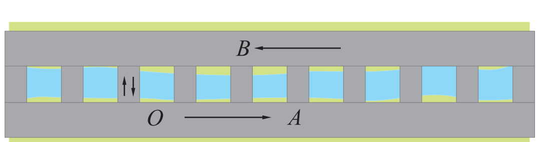
3) Na sljedećim slikama prikazani su grafovi nekoliko funkcija:



Razvrstajte te grafove u dvije skupine, u prvoj neka budu oni koji imaju ista matematička svojstva kao i graf pod A, a u drugoj oni koji to nemaju. Nađite što više različitih metoda za klasificiranje i objasnite na koji ste način proveli razvrstavanje.

Odaberi neku drugu od prikazanih funkcija pa provedite i za nju isti zadatak.

4) *Problem jednosmjernog prometa.* Kao što je prikazano na slici, ceste uz dvije obale rijeke jednosmjerne su i suprotnih su smjerova. Na jednakim razmacima izgrađeno je više mostova kojima je dopušten promet u oba smjera.



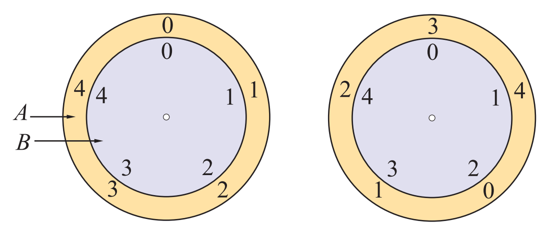
Automobili se mogu kretati na dva načina: (a) mogu se kretati cestom, za m jedinica od jednog do drugog mosta, pri čemu je m nenegativan cijeli broj i (b) mogu prelaziti most.

Neka je O ishodišna točka na jednoj od cesta. A i B su neke druge točke na cestama i $\overrightarrow{OA}$ znači kretanje od O do A. Pod $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ misli se na kretanje od O do A, nakon kojeg slijedi kretanje od A do C na isti način kao što bi bilo kretanje od O do B.

Koju strukturu ima ovo zbrajanje?

5) Priredite dva kruga A i B različitih veličina. Ispišite brojeve 0, 1, 2, 3, i 4 uz njihove rubove i to na jednakim razmacima (lijeva slika). Poklopite krugove i spojite njihova središta tako da se krugovi mogu vrtjeti oko njih.

Računska operacija zbrajanja $3 \oplus 4$ uz uporabu dvaju krugova definira se na sljedeći način: broj 3 kruga A postavi se uz broj 0 na krugu B. Zatim se na krugu A očita rezultat: to je onaj broj koji je uz 4 na krugu B (desna slika).



Nađite što više pravila za ovako definiranu operaciju $\oplus$ na skupu $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Na kraju

U tradicionalnoj nastavi matematike prevladavaju zadaci u kojima se pitanje postavlja izravno: Koliko je...?, Izračunajte!, Riješite jednadžbu!, Dokažite! i sl. Pri rješavanju najčešće se primjenjuje prethodno usvojen algoritam. Zadaci se razlikuju po složenosti ali ne i idejno. Suvremena nastava uvažava novu ulogu matematike, prije svega njezinu uporabu pri matematičkom modeliranju i rješavanju stvarnih životnih problema. Mijenja se i didaktika ovog nastavnog predmeta. Oslobađa se dogmatičnosti čime se nastavniku daje veća sloboda, a njegova kreativnost može doći do punog izražaja. U prvi plan dolazi učenik i to ne samo kao pasivni sudionik već i kao aktivni stvaralac procesa obučavanja. U tom smislu problem otvorenog tipa snažno je i učinkovito didaktičko oruđe.