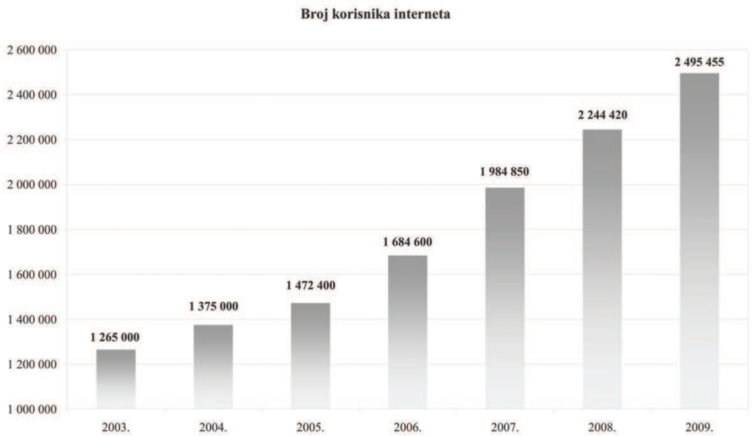
O jednoj primjeni računala

u nastavi matematike



Slika 1.

Branimir Dakić,
Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb

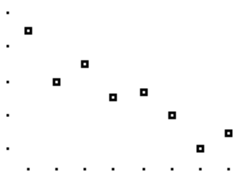
Hrvatska agencija za poštu i elektroničke komunikacije (HAKOM) u svojem godišnjem izvješću o radu za 2009. godinu daje i sljedeći dijagram kojim je zorno prikazan broj korisnika interneta u Republici Hrvatskoj od 2003. do 2009. godine.

Jasno se uočava da je broj korisnika interneta u stalnom porastu. Možemo li na temelju analize podataka koji se mogu iščitati s dijagrama procijeniti koliki će biti broj korisnika interneta u bližoj budućnosti, u nekoliko narednih godina?

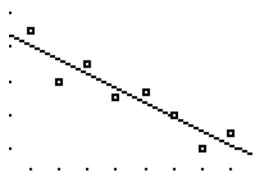
Ovakva razmišljanja u praksi nisu rijetkost. Naime, promatranjem nekog prirodnog ili društvenog fenomena ili pojave i pri raznim eksperimentima prikupljaju se podaci čijom se obradom želi doći do određenih zaključaka korisnih za predviđanje i planiranje budućih događanja. Rezultat obrade najčešće se iskazuje matematičkim opisom koji nazivamo **matematičkim modelom** te pojave ili eksperimenta. Matematički modeli po obliku mogu biti raznovrsni, često su to neke elementarne realne funkcije koje na najbolji način aproksimiraju prikupljene podatke. Na slici 2. vidimo neki skup podataka prikazan na zaslonu grafičkog kalkulatora točkama u koordinatnoj ravnini. Na slici 3. položen je pravac koji je tim točkama, kako se čini, dobro prilagođen.

Kako za dani skup točaka (podataka) odrediti optimalno rješenje, pravac (linearnu funkciju) koji ga najbolje aproksimira, problem je koji se zove **problem linearne regresije**, a sam pravac – **pravac regresije**. U konkretnom primjeru takav je pravac jedinstven a metoda prema kojoj se on određuje jest **metoda najmanjih kvadrata**.

No, smisao ovog članka nije eksplicitno uvođenje statističkih pojmova i obrada statističkih kriterija. Stoga se ograničimo na sâmo "tehničko" rješenje s ciljem boljeg razumijevanja elementarnih realnih funkcija i ukazivanja na njihovu praktičnu primjenu.



Slika 2.



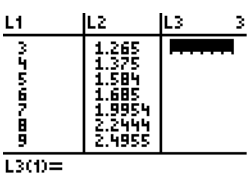
Slika 3.

Danas postoje vrlo učinkoviti i jednostavni računalni programi za rješavanje problema regresije. Ta se procedura može izvesti i bilo kojim grafičkim kalkulatorom. Kako, bit će prikazano u daljem tekstu. U drugom dijelu članka prikazat ćemo ukratko i rješenje istih primjera primjenom vrlo jednostavne i učinkovite **GeoGebre**.

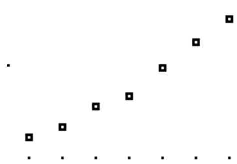
Vratimo se sada našem primjeru s početka. Podatke iz dijagrama ispišimo u tablicu. U prvom njezinom retku zapisana je godina u smislu 200n-ta, a u drugi redak unesen je broj korisnika u milijunima.

n	korisnici (u 10^6)
3	1.265
4	1.375
5	1.584
6	1.685
7	1.9954
8	1.24442
9	1.4955

Podatke iz tablice unesemo u kalkulator (slika 4.) pa ih prikažemo kao točke u koordinatnoj ravnini (slika 5.).

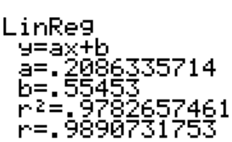


Slika 4.

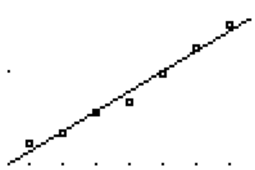


Slika 5.

Nakon toga od kalkulatora zatražimo određivanje pravca regresije. Na zaslonu se pojavljuje rješenje (slika 6.).



Slika 6.



Slika 7.

Vidimo da jednadžba pravca regresije glasi $y = 0.2086x + 0.5545$ (koeficijenti a i b zaokruženi su na četiri decimale). Napokon možemo zahtijevati i ucrtavanje tog pravca na sliku 5. kako bi se i zorno predočila prilagodba pravca danog skupa podataka (slika 7.).

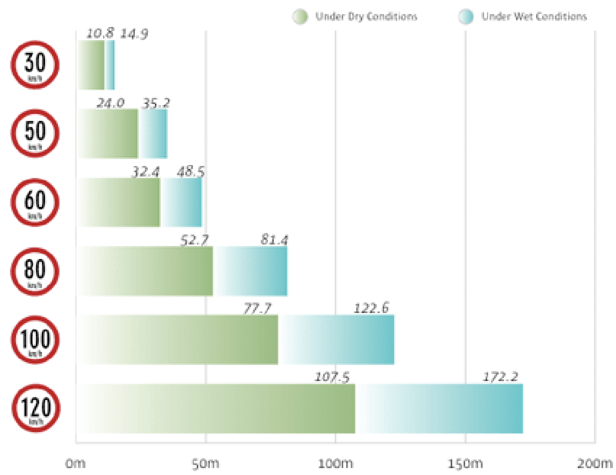
Naš bi zaključak glasio: Promatramo li porast broja korisnika interneta u Hrvatskoj u razdoblju od 2003. do 2009. godine, možemo procijeniti, uz pretpostavku da je taj porast linearan, da se odvija po funkciji $\hat{y} = 0.2086n + 0.5545$. Koliko je ta procjena točna moglo bi se provjeriti uvidom u podatke HAKOM-a. Je li broj korisnika u 2010. bio približno 2 640 500? Provjerite!

Primijetimo da se na zaslonu kalkulatora pri ispisu koeficijenata a i b u jednadžbi pravca regresije pojavio i broj r. Koje je njegovo značenje? Taj broj, za koji vrijedi $-1 \leq r \leq 1$, jest **koeficijent korelacije** i statistička je mjera uspješnosti, pokazuje koliko dobro dobiveni pravac regresije "pokriva" podatke. Što je njegova apsolutna vrijednost bliža 1, rezultat je bolji. Kad je $|r| = 1$, sve su točke na pravcu regresije. Ako je r blizu nule, "pokrivanje" je slabo. Primijetimo još da je predznak koeficijenta korelacije uvijek isti kao i predznak koeficijenta smjera pravca regresije.

Zaustavna duljina vozila na suhoj cesti

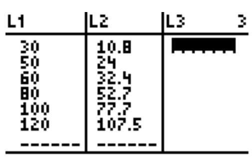
Koliki put prijeđe automobil nakon što je vozač pri nekoj brzini primijetio ispred sebe na cesti prepreku te pritisnuo papučicu kočnice? Sljedeći prikaz načinjen je na temelju mjerenja. Zelenom bojom prikazana je duljina kočenja na suhoj, a plavom bojom na vlažnoj cesti.

Duljina traga kočenja očito ovisi o brzini kojom se to vozilo kretalo u trenutku kočenja. Razmotrimo situaciju ako je cesta suha. Odredimo pravac regresije koji će biti matematički model za opis ovisnosti zaustavne duljine o brzini kretanja vozila. Postupamo kao u prethodnom primjeru.

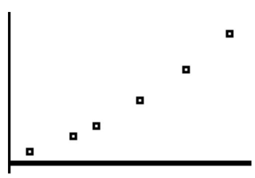


Slika 8.

Podatke iz grafičkog prikaza (slika 8.) unesimo u kalkulator i potom ih prikažimo odgovarajućim točkama u koordinatnom sustavu.



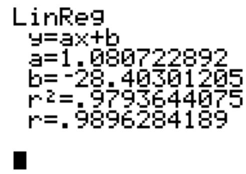
Slika 9.



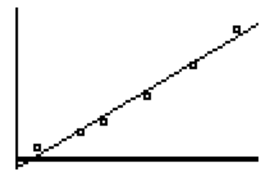
Slika 10.

Kalkulatorom odredimo sada pravac regresije. Varijabla x jest brzina kretanja automobila u trenutku kočenja, a y je zaustavna duljina. Kako su te točke raspoređene, vidimo na slici 10. Sljedeća slika daje rješenje problema a na onoj koja slijedi možemo sagledati uspješnost prilagodbe pravca regresije danim podacima.

Vizualni je dojam da dobiveni pravac $y = 1.08x - 28.4$ dobro aproksimira podatke a to pokazuje i koeficijent korelacije $(r = 0.9896284189)$. No pažljivijim promatranjem slike 10. stječe se dojam kako bismo mogli dobiti bolju prilagodbu ako bi funkcija bila, primjerice kvadratna. Odnosno, čini se kako bi mogla postojati parabola koja bi bolje prilegla točkama. Moguće je postupcima koji su na kalkulatoru isti kao i za linearnu regresiju odrediti kvadratnu funkciju koja bi se od svih kvadratnih funkcija najbolje prilagodila podacima.

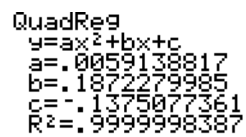


Slika 11.

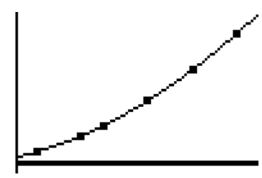


Slika 12.

Odmah se uočava da je kvadratna funkcija $y = 0.0059x^2 + 0.1872x - 0.1375$ (koeficijenti su zaokruženi na četiri decimale) gotovo idealan model za opis ovisnosti duljine kočenja nekog automobila o brzini njegova kretanja. Naime, koeficijent r je gotovo jednak 1.

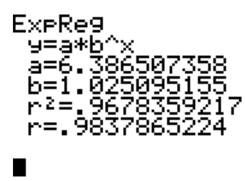


Slika 13.

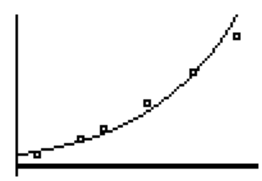


Slika 14.

Naravno, moglo se postaviti i pitanje eksponencijalne regresije, određivanja eksponencijalnog modela, jer i on se prema slici nameće kao moguće rješenje. To je također zadatak lako provediv kalkulatorom i rješenja se vide na slikama 15. i 16.



Slika 15.



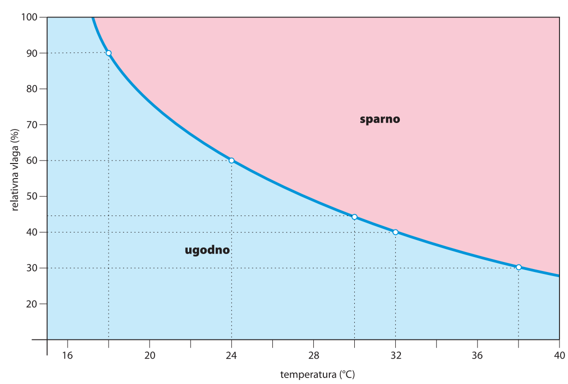
Slika 16.

Funkcija $y = 6.3865 \cdot (1.025)^x$ također dobro aproksimira dane podatke, ali nešto slabije od linearne a još slabije od kvadratne.

Na slici 8. vidimo podatke o duljini kočenja na vlažnoj cesti. Mogli bismo načiniti analizu podataka sličnu onoj za suhu cestu i odrediti krivulju regresije na analogan način.

Sparina

U MiŠ-u 56. u članku "Čitamo graf" naveden je i primjer naslovljen sa *Sparina*. Naime, o tome kolika je temperatura zraka i kolika je relativna vlažnost zraka ovisi osjećamo li se ugodno ili ne. Na priloženoj slici 14. uočljiva je granica između ugodnog i sparnog vremena. Relativna vlažnost izražena je u postocima, temperatura zraka u Celzijevim stupnjevima.



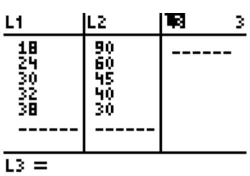
Slika 17.

Postavljeno je više pitanja kojima je svrha ustanoviti u kojoj se mjeri učenici snalaze u čitanju raznih grafičkih prikaza u koordinatnoj ravnini. Iskoristimo isti primjer za određivanje jednadžbe krivulje koja razdvaja područja sparine i ugodnog vremena. Taj zadatak riješimo na način kako je to rađeno u prethodnim dvama primjerima.

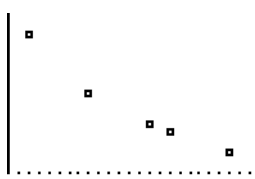
Uočimo nekoliko posebnih točaka krivulje koja razdvaja područja ugode i sparine:

$$(18, 90),\ (24, 60),\ (30, 45),\ (32, 40),\ (38, 30).$$

Unesimo podatke u kalkulator i pogledajmo na zaslonu kako su u koordinatnoj ravnini raspoređene odgovarajuće točke (Slike 18. i 19.):

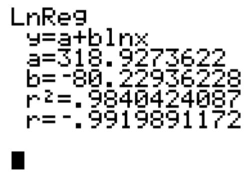


Slika 18.



Slika 19.

Pretpostavimo da se logaritamska krivulja oblika $y = a + b\ln x$ dobro prilagođuje podacima kojima raspolažemo. Evo kako izgleda rješenje dobiveno uz pomoć kalkulatora:

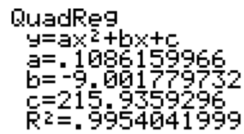


Slika 20.

Slika 21.

Dakle od svih krivulja čija je jednadžba oblika $y = a + b\ln x$ podatke najbolje "pokriva" krivulja $y = -80\ln x + 319$.

Provjerimo daje li kvadratna regresija bolji rezultat:



Slika 22.

Slika 23.

Granična krivulja ima jednadžbu $y = 0.1086x^2 - 9x + 216$ i bolje je rješenje problema.

Mogli bismo naći još primjera poput triju prikazanih ali vjerujemo kako su već i ovi odabrani poslužili svrsi. Ponovimo još jednom da, jer se radi o gradivu 2. razreda srednje škole, težište stavljamo na raspoznavanje elementarnih realnih funkcija i njihovih svojstava te ukazivanje na realne situacije u kojima se te funkcije pojavljuju kao njihov svojevrsni matematički opis.

Zasigurno se možemo složiti kako su grafički kalkulatori spretni i vrlo pogodni za rješavanje opisanih i njima sličnih zadataka. No, kao što smo već spomenuli, postoje i razni jednostavni računalni programi koji uspješno rješavaju iste probleme a imaju i neke prednosti od kojih je jedna i znatno kvalitetnija slika.

GeoGebra 3.2 ima čitavu paletu naredaba za određivanje približnih funkcija koje najbolje opisuju skup podataka (točaka) koje su zadane. Takve se naredbe u *GeoGebri* zovu *Prilagodbe*: *PrilagodbaEksponencijalna, PrilagodbaLinearna, PrilagodbaLinearnaX, PrilagodbaLogaritamska, PrilagodbaLogistička, PrilagodbaPolinomna, PrilagodbaPotencijska, PrilagodbaSinusna*.

Pravac regresije možemo konstruirati i alatom iz alatne trake:  – dovoljno je označiti alat pa lijevom tipkom miša prevući sivi pravokutnik preko željenih točaka i program će konstruirati pravac regresije. U algebarskom prozoru možemo očitati njegovu jednadžbu i prebaciti ga u eksplicitni zapis.

Pravac regresije možemo dobiti i pomoću naredaba *PrilagodbaLinearna* ali i kao graf funkcije *PrilagodbaPolinomna* iz trake za unos. Potrebno je prvo u tablicu unijeti podatke kao što je prikazano na slici. Redne brojeve godina možemo unijeti i pomoću relativnog kopiranja – označimo prva dva broja pa povučemo plavi kvadratić do ćelije $A7$. Označimo oba stupca povlačeći pritisnutu desnu tipku miša. Zatim kliknemo desnom tipkom miša bilo gdje na označeno područje i iz padajućeg izbornika izaberemo *Izradi listu točaka*. U algebarskom prikazu pojavi se *lista1* koja sadrži niz točaka, a isti niz točaka prikaže se u grafičkom prikazu numerirano $P_1, P_2, \ldots, P_7$. U traku za unos upišemo *PrilagodbaLinearna[lista1]* odnosno *PrilagodbaPolinomna[lista1,1]* ako želimo razmatrati funkciju a ne pravac. Tako ćemo lakše i izračunati broj korisnika u 2010. godini – samo upišemo $f(10)$ u traku za unos. Za koeficijent korelacije upišimo $r = KoeficijentKorelacije[lista1]$. Primijetit ćemo da svi podaci odgovaraju podacima na zaslonu kalkulatora, osim broja korisnika u 2010. do čega je došlo zbog greške prilikom zaokruživanja na 4 decimalna mjesta.

Kod drugog je primjera nakon unosa podataka u tablicu i izrade liste točaka dovoljno upisati samo dvije naredbe:

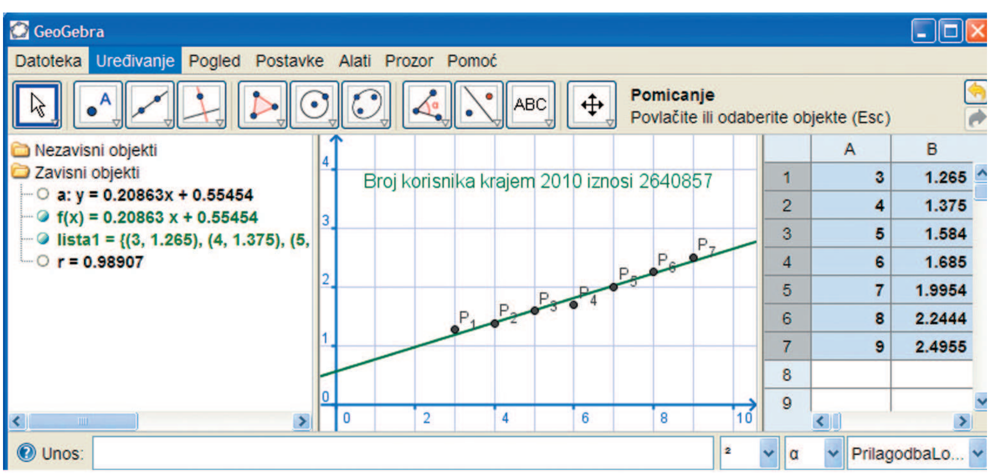
PrilagodbaPolinomna[lista1,1]
— daje linearnu prilagodbu

PrilagodbaPolinomna[lista1,2]
— daje kvadratnu prilagodbu

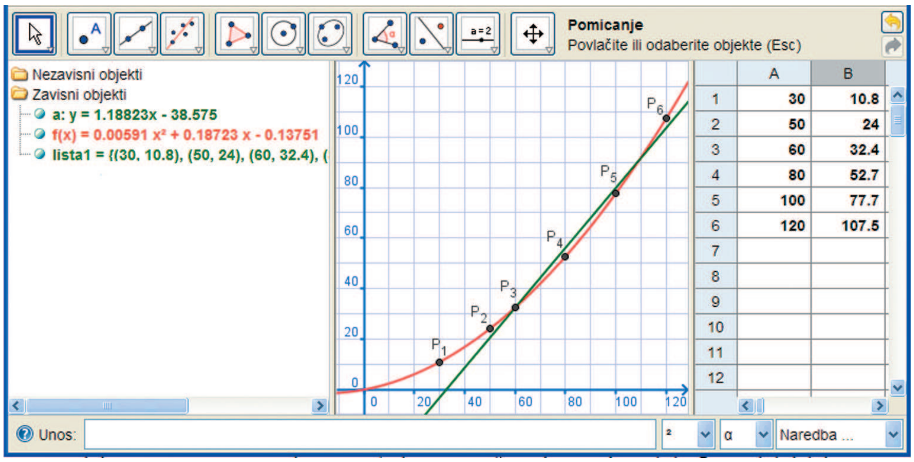
Kako bismo vidjeli točke u grafičkom prikazu moramo stezati x i y os (držeći pritisnutu tipku *Shift* povlačimo strelicom miša os x ili os y prema ishodištu, a u svojstvima grafičkog prikaza namjestimo da $xOs : yOs$ bude $1 : 1$.

Već i prostim okom uočit ćemo da je kvadratna prilagodba puno preciznija od linearne.

U ovakvim je slučajevima zaslon računala uz upotrebu programa *GeoGebra* puno praktičniji od gra-



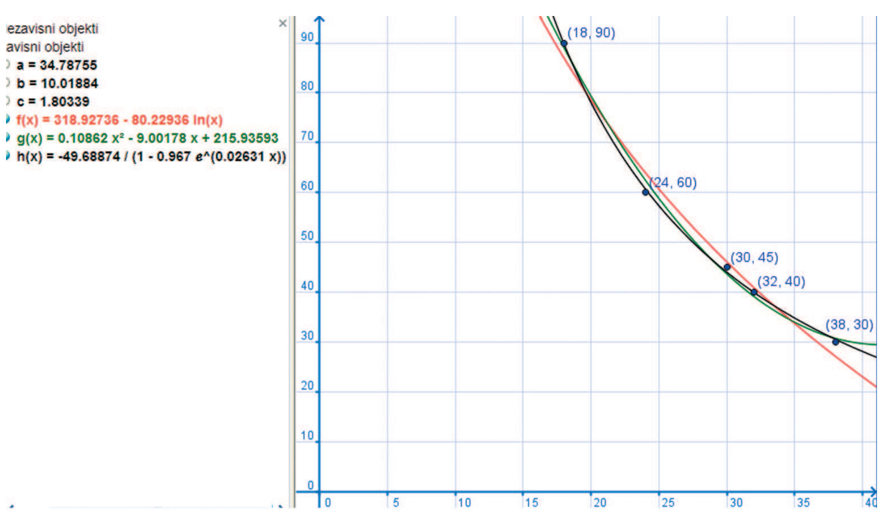
Slika 24.



Slika 25.

fičkog kalkulatora. Naime, možemo zajedno imati sve grafove i uspoređivati ih. S obzirom na puno bolju preglednost i rezoluciju preciznije ćemo donositi zaključke o tome koja se od funkcija bolje prilagodila zadanim podacima. Također možemo lako izračunati zbroj $(f(x_i) - y_i)^2$. U ovom slučaju dovoljno je samo u prvu ćeliju $C1$ upisati $f(A1)$ a zatim relativno kopirati. Ponovno u ćeliju $D1$ upišimo $(C1 - B1)^2$ i relativno kopirajmo. Naredba $Zbroj[D1 : D6]$ izračunat će nam traženi zbroj koji za kvadratnu prilagodbu u ovom primjeru iznosi samo 0.0010641787.

U trećem primjeru prikazane su logaritamska (crvena), kvadratna (zelena) i logistička (crna) regresije. Istraživanjem zbroja najmanjih kvadrata $(f(x_i) - y_i)^2$ za pojedinu funkciju: 34.78755, 10.01884 i 1.80339 dolazi se do zaključka da je najbolja prilagodba logistička. To možemo zaključiti i promatranjem triju prikazanih grafova. Logistička funkcija je funkcija oblika $h(x) = \dfrac{a}{1 + be^{cx}}$. U ovom primjeru logistička funkcija je dana jednadžbom $h(x) = \dfrac{-49.68874}{1 - 0.967e^{0.02631x}}$.



Slika 26.