O jednoj trostranoj piramidi

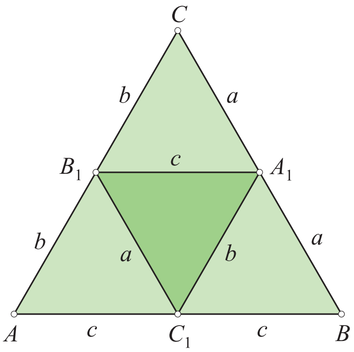
Branimir Dakić, Zagreb

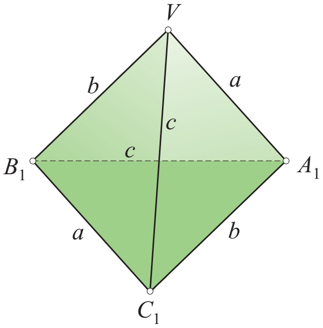
Trostrana piramida kojoj su sve strane sukladni jednakostranični trokuti jedan je od pet pravilnih poliedara. Jednostavno je izraditi papirnati model takve piramide. Nacrtamo na komadu papira jednakostraničan trokut i konstruiramo njegove srednjice. Izrežemo trokut i savijemo ga oko njegovih srednjica te tako dobijemo piramidu.

Također se u obradi geometrije prostora u osnovnoj i srednjoj školi pojavljuje i nešto općenitija piramida, ona kojoj je osnovka jednakostraničan trokut a bočne strane jednakokračni, međusobno sukladni trokuti.

No pitanje je: Postoji li trostrana piramida kojoj su sve četiri strane sukladni raznostranični trokuti?

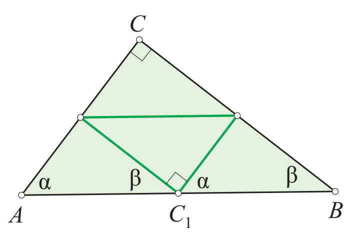
Odgovor se čini naizgled jednostavnim. Pokušajmo postupati praktično, jednako kao što smo to činili slažući pravilni tetraedar. Nacrtamo dakle na komadu papira raznostraničan trokut ABC, iscrtamo na njemu srednjice $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ i $\overline{A_1C_1}$ pa provedemo savijanje oko tih srednjica. Točke A, B i C spojit će se u vrh V piramide.



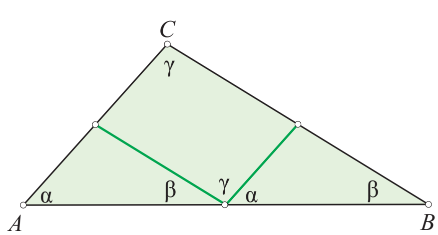


No je li baš sve tako jednostavno kao što se čini? Ako smo odabrali šiljastokutan trokut, neće biti problema i složena će piramida zadovoljavati uvjete zadatka. Sve su njezine strane sukladni, raznostranični (šiljastokutni) trokuti.

No neka trokut koji smo odabrali bude pravokutan. Provedimo s njim isti, prethodno opisan postupak. Što primjećujemo? Kako je za pravokutni trokut $\alpha + \beta = 90°$, onda će se svijanjem trokuta oko srednjica, dužine $\overline{AC_1}$ i $\overline{BC_1}$, koje bi trebale biti bočni bridovi piramide, spojiti u samoj ravnini trokuta te se na taj način neće dobiti piramida.

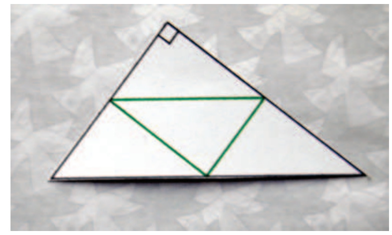


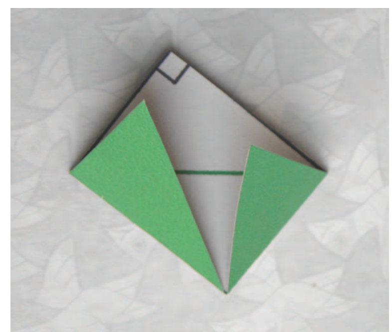
Još je nepovoljniji izbor tupokutan trokut. Zbroj dvaju kutova tog trokuta manji je od trećeg, tupog kuta $(\alpha + \beta < \gamma)$, pa ta dva manja kuta i ne mogu natkriti najveći kut. Uvjerite se sami u nemogućnost rješenja zadatka u ovom slučaju tako što ćete provesti postupak analogan opisanom za pravokutni trokut.

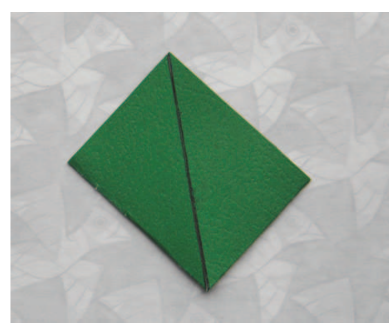


Opisano rješavanje vrlo je didaktički vrijedno, poticajno je za razvitak prostornog zora i pogodno je za obradu uz uvodno gradivo teme *Geometrija prostora* u osnovnoj pa i u srednjoj školi.

Vratimo se još na trenutak našoj trostranoj piramidi sa sukladnim stranama. Primijetimo još da su parovi mimoilaznih bridova ove piramide jednako dugački. Ovaj je uvjet ekvivalentan našem uvjetu s početka i upravo je njega Vladimir Devidé odabrao







određujući *semiregularnu* trostranu piramidu. Prof. Devidé kaže:

Tetraedar nazivamo **semiregularnim** ako mu svaki brid ima duljinu kao njemu mimosmjerni.

Nakon ove definicije i rješavanja problema egzistencije piramide kojoj su svaka dva para mimoilaznih bridova sukladni, prof. Devidé navodi niz zanimljivih svojstava:

Pokazuje se da je tetraedar T semiregularan onda i samo onda ako je ispunjen bilo koji od ovih uvjeta:

a) Paralelepiped opisan oko T je pravokutan.

b), c), d), e) Pobočke od T su sukladne, ili imaju jednaku površinu, ili imaju jednak zbroj kvadrata duljina stranica, ili imaju jednake polumjere opisanih kružnica.

f) Prostorni kutovi od T su kongruentni.

g) Grupa gibanja od T je Kleinova četvorna grupa ili je T pravilan.

h) Prostorni kutovi uz parove mimosmjernih bridova od T međusobno su jednaki.

i) Spojnice polovišta mimosmjernih bridova međusobno su okomite.

j) Težišnice od T imaju jednake duljine.

k) Ne postoji ni jedna vanjska dodirna kugla od T nad nekim njegovim bridom.

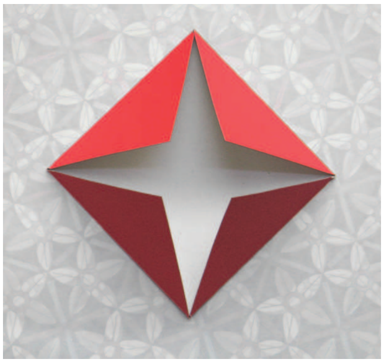
k), l), m), n) Poklapaju se dvije od ovih triju točaka od T: težište, središte opisane sfere, središte upisane sfere.

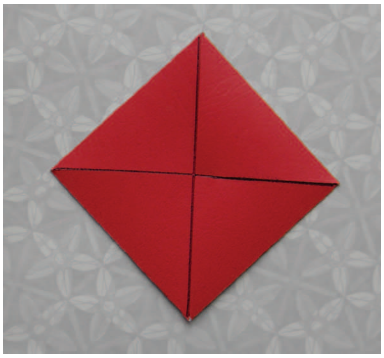
o) Vanjske simetralne ravnine uz mimosmjerne bridove od T međusobno su paralelne.

Ovim navođenjem moglo bi se završiti s obradom problema s početka ovog članka. No put kojim smo se kretali tragajući za odgovorom na pitanje postoji li trostrana piramida čije su sve strane sukladni trokuti, može potaknuti i neka nova zanimljiva pitanja od kojih je jedno: Može li se od kvadrata, analognim postupcima složiti piramida? Ona i ne mora biti trostrana, niti joj pobočke moraju biti sukladne.

Nacrtajmo na komadu tvrđeg papira kvadrat. Slijedimo ideje prethodnih rješenja pa crtamo spojnice po dvije susjedne stranice kvadrata. Tako ćemo dobiti dužine čije su duljine jednake duljini polovine dijagonale i te će dužine biti osnovni bridovi četverostrane piramide.

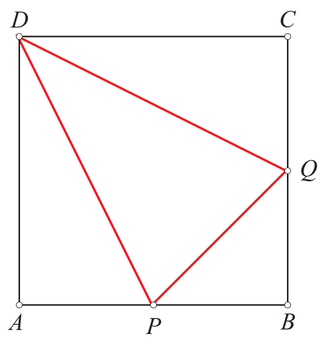
Spojit ćemo polovišta po dvije susjedne stranice kvadrata. No kad ovu zamisao provedemo u djelo shvatit ćemo da to ne ide. Naime, pravokutni trokuti, koji bi trebali biti pobočke piramide nakon savijanja, jednostavno će se spojiti u ravnini zamišljene osnovke i točno pokriti predviđenu osnovku. Dakle, ovaj put nije nam dao rješenja.



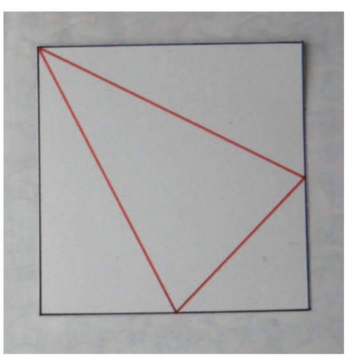


No ne odustajmo, možda ipak od kvadrata možemo svijanjem papira, bez rezanja i preklapanja složiti piramidu. Pokušajmo na drugi način.

Na kvadratu izvucimo dužine onako kako je to prikazano na slici. Pritom su P i Q polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata. I sada složimo piramidu spajajući točke A, B i C u jedan vrh piramide. Ako



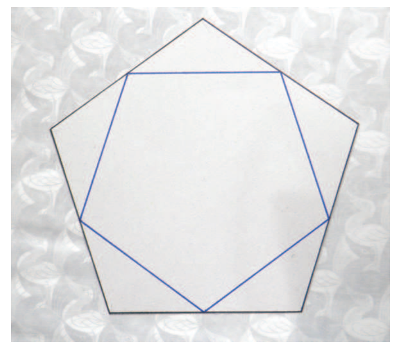
pravokutni trokut PBQ odaberemo za osnovku piramide, tada je bočni brid $\overline{BD}$ okomit na ravninu osnovke a sukladni pravokutni trokuti APD i CQD dvije su pobočke.



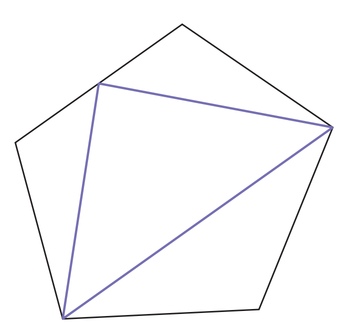
Uspjeli smo dakle od kvadrata složiti trostranu piramidu. Možete li u kratkom roku odgovoriti na pitanje koliki je obujam ove piramide, a još brže koliko je njezino oplošje?

Potaknuti prethodnim zadatkom možemo nastaviti novim pitanjem: Možemo li od pravilnog peterokuta složiti piramidu?

Naravno, ne možemo to postići spajanjem polovišta uzastopnih stranica pa svijanjem oko tih spojnica. Zašto? Pa same slike daju odgovor.

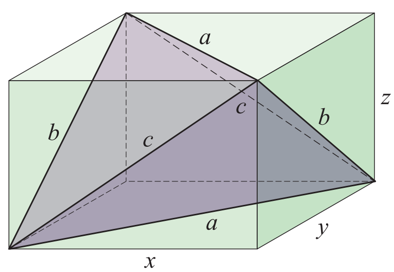


Ipak je moguće složiti piramidu. Kako će izgledati njezina “mreža”, vidimo na sljedećoj slici.



Vratimo se ipak na kraju našoj trostranoj piramidi sa sukladnim stranama. Prikažimo još kako je zgodno određivanje formule za obujam takve piramide.

Svaku trostranu piramidu možemo "obući" u paralelepiped tako da pojedinim njezinim bridom položimo ravninu, koja je paralelna bridu, koji mu je mimoilazan. Kad to napravimo za našu piramidu, jer su njezini mimoilazni bridovi sukladni, takav će paralelepiped biti kvadar. Promotrimo sljedeću sliku:



Neka su a, b i c duljine bridova tetraedra, a x, y i z duljine bridova kvadra u koji je smještena piramida. Možemo zapisati sustav jednadžbi:

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$y^2 + z^2 = b^2$$
$$x^2 + z^2 = c^2.$$

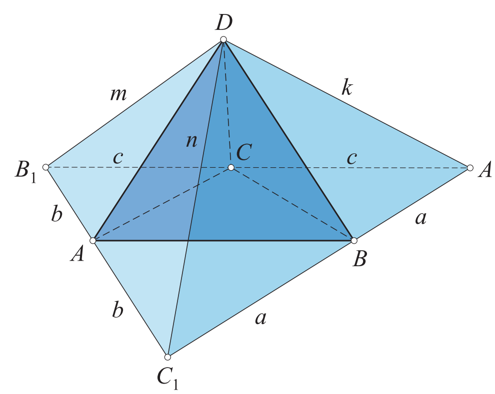
Zbrojimo jednadžbe i dobijemo $2(x^2 + y^2 + z^2) = a^2 + b^2 + c^2$. Uvrštavanjem iz prve jednadžbe sustava imamo $2(a^2 + z^2) = a^2 + b^2 + c^2$ odakle dobivamo $x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$. Analogno slijedi $y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$ te $z^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

I sada računamo volumen naše piramide. Od volumena kvadra oduzimamo volumene četiriju sukladnih pravokutnih trostranih piramida koje pripadaju kvadru ali su izvan piramide kojoj računamo obujam. Taj račun nije teško provesti jer sve četiri uočene piramide imaju po jedan pravokutni trobrid. Dakle je

$$V = xyz - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}xyz = \frac{1}{3}xyz$$
$$= \frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}.$$

No postoji još jedan lijep način na koji možemo izračunati obujam naše piramide.

Neka je $A_1B_1C_1$ onaj trokut od kojega smo krenuli slagati piramidu $ABCD$. Obujam piramide $A_1B_1C_1D$ četiri je puta veći od obujma piramide $ABCD$.



Nadalje, pobočke piramide $A_1B_1C_1D$ pravokutni su trokuti. Naime, $|AB_1| = |AC_1| = |AD|$ pa je prema obratu *Talesova poučka* kut pri vrhu D trokuta B_1C_1D pravi. Isto vrijedi i za kutove pri D u trokutima C_1A_1D i A_1B_1D.

Označimo $|A_1D| = k, |B_1D| = m$ te $|C_1D| = n$ pa možemo zapisati sustav jednadžbi:

$$k^2 + m^2 = 4c^2$$
$$m^2 + n^2 = 4b^2$$
$$n^2 + k^2 = 4a^2.$$

Ovaj simetrični sustav rješavamo analogno prethodno riješenom, te dobijemo:

$$k^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2),$$
$$m^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2),$$
$$n^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2).$$

Prevalimo sada piramidu $A_1B_1C_1D$ na jednu njezinu bočnu stranu, primjerice B_1C_1D. Tada će njezin brid k biti njezina visina te ćemo lako izračunati volumen:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}mn \cdot k = \frac{1}{6}mnk.$$

Obujam V piramide $ABCD$ četiri je puta manji pa imamo:

$$V = \frac{1}{24}kmn$$
$$= \frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}.$$

I tako smo dovršili priču o piramidi kojoj su sve strane sukladni trokuti. Ili možda nismo?

LITERATURA

1/ B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

2/ V. Devidé, *Über eine Klasse von Tetraedern*, Rad JAZU, knjiga 408, Matematičke znanosti, svezak 3., Zagreb 1984.

3/ I. F. Sharygin, *Problems in Solid Geometry*, MirPublishers, Moskva, 1986.

Stručni skup u Puli 2011.

Poštovane kolegice i kolege!

Pozivamo vas na 7. stručno-metodički skup – *Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi* koji će se održati od 13. do 15. listopada 2011., u Puli, u hotelu Histria.

- Tema skupa: **Inovacije u nastavi matematike**
- Na skup su pozvani svi učitelji matematike osnovnih škola, nastavnici matematike srednjih škola te sveučilišni profesori Republike Hrvatske.
- Predavači i voditelji radionica biti će naši istaknuti sveučilišni profesori, učitelji i nastavnici te savjetnici Agencije za odgoj i obrazovanje. Na skupu će se raditi plenarno i u radionicama, bit će i okruglih stolova, izložbi i promocija.
- Skup se organizira u suradnji s Agencijom za odgoj i obrazovanje!

Pozivamo vas da i na ovome, sedmom po redu skupu aktivno sudjelujete kao predavač i/ili voditelj radionice.

- Plenarni rad
- Rad u metodičkoj radionici
- Okrugli stol
- Izložba
- Održavanje stručnih promocija

Kotizacija u iznosu od 300,00 kuna po osobi uplaćuje se na žiro račun *Matematičkog društva "Istra"*, broj 2360000-1102141663 s pozivom na broj 2011-OIB.

U kotizaciju je uračunat Zbornik radova i ostali materijali.

- Prijave na skup: `http://www.ettaedu.eu` od 22. kolovoza do 30. rujna 2011.
- Prijava radova/radionica: do 30. lipnja 2011. na `skup.mdi@gmail.com`
- Predaja radova: do 25. kolovoza 2011. na adresu `skup.mdi@gmail.com`

Smještaj: Sudionici skupa bit će smješteni u hotelima Histria i Palma.

Kontakt osobe:

Branka Antunović-Piton, `bpiton@inet.hr` i Robert Gortan, `rgortan@gmail.com`