Razlomci

– uzročnici loma u nastavi matematike?

Dubravka Glasnović Gracin,
Zagreb

Kao što nam samo ime govori, razlomci nas asociraju na neko **lomljenje**. Naravno, riječ je o dijeljenju (lomljenju) cjeline na jednake dijelove. No uzrokuju li razlomci u šestom razredu i neke druge **lomove**? Lomove u stavu učenika prema matematici, prema učenju i vježbanju matematike? Lomove u pristupu matematičkom gradivu koje kod računskih operacija s razlomcima prestaje biti jasno kao što je bilo kod prirodnih brojeva? Ovdje se sad zahtijeva slijepo slijeđenje niza naštrebanih pravila za zbrajanje, množenje i dijeljenje razlomaka, zatim za prebacivanje iz mješovitog broja u razlomak, za uspoređivanje razlomaka itd. Ovaj članak pokušava biti na tragu postavljenih pitanja.

Matematika u šestom razredu

Iako se matematika općenito shvaća kao težak predmet kroz cijelo školovanje, moje iskustvo govori da djeca u peti razred ipak uglavnom dolaze s pozitivnim stavom prema matematici. Tek se u šestom razredu primjećuju veći **lomovi** u stavovima učenika prema matematici, odnosu prema učenju i vježbanju matematike te u znanju propisanog gradiva. To se očituje u daljnjem padu ocjena i gubljenju interesa za predmet. Naravno, i godine puberteta imaju utjecaja na ovaj fenomen.

Osim toga, utjecaj zasigurno ima i gradivo koje se obrađuje po planu i programu u šestom razredu osnovne škole (MZOŠ, 2006.). Ako se matematički sadržaji grubo dijele na one koji učenika pripremaju za svakodnevni život i na one sadržaje koji učenika pripremaju za daljnje stupnjeve matematičkog obrazovanja (IDM, 2007.), onda bih rekla da je gradivo šestog razreda jako važno baš za daljnje matematičko obrazovanje učenika. Ovdje se uče računske operacije s razlomcima i s cijelim brojevima, kao i rješavanje jednadžbi s jednom nepoznanicom. Možemo reći da je ovo gradivo baza za kasnije "baratanje" u algebri. Gradivo geometrije u šestom razredu također čini osnovu za gotovo sva kasnija geometrijska znanja (osnovne konstrukcije i formule vezane za trokut i četverokut te sukladnost trokuta). Za razliku od šestog, u sedmom razredu gradivo je velikim dijelom orijentirano na primjenu u svakodnevici (postoci, jednostavni kamatni račun, proprocionalnost, obrnuta proporcionalnost, sličnost i sl.).

Razlomci u matematičkom obrazovanju

Prema važećem Nastavnom planu i programu (MZOŠ, 2006.) učenici se prvi put službeno susreću s pojmom razlomka u nastavi matematike u petom razredu osnovne škole kada uče osnovno gradivo o razlomcima (crtanje, simboličko pisanje, čitanje razlomaka, zbrajanje i uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika). U šestom razredu uče se četiri osnovne računske operacije s razlomcima. Ovdje dolazi do izražaja problem slijepog slijeđenja pravila bez razumijevanja, kako postupka, tako i pojma razlomka. Drugim riječima, na ovom se mjestu posebno pojavljuje **problem rutine i ideje** (tj. proceduralnog i konceptualnog znanja), pri čemu se čini da je kod razlomaka u šestom razredu **ideja** definitivno pala u drugi plan. Rezultati istraživanja naših udžbenika, kao i trenutno važećeg plana i programa za područje razlomaka, pokazuju da u našoj nastavi matematike dominiraju simbolički zadaci zatvorenog tipa u kojima se zahtijeva računanje s razlomcima prema određenom pravilu (Glasnović Gracin, neobj.). Niti jedan istraženi udžbenik nije ponudio zadatak u kojem bi se tražile aktivnosti obrazlaganja, argumentiranja ili jednostavnijeg dokazivanja kod računskih operacija s razlomcima. Također, aktivnosti crtanja ili interpretacije nisu zastupljeni u značajnijoj mjeri u zadacima istraženih udžbenika.

Pojam razlomka

Da bismo uopće govorili o razumijevanju računskih operacija s razlomcima, trebamo prvo raščistiti jesu li učenici usvojili **pojam razlomka** u petom razredu. Usvojiti pojam razlomka značilo bi, primjerice, da kada učeniku napišemo na ploču $\frac{1}{2}$ da on automatski **u glavi** "vidi" polovicu jabuke, pola kruga i sl. Ukoliko učenik nema te asocijacije, već pred sobom vidi samo brojeve 1 i 2 te između njih nekakvu crtu, utoliko nemojmo očekivati da će on u šestom razredu iz rukava lako izvući pravilo o zbrajanju dvaju razlomaka kao nešto prirodno. Naime, ako učenik kod $\frac{1}{2}$ vidi samo brojeve 1 i 2, a kod $\frac{1}{3}$ vidi brojeve 1 i 3, a ne ono što polovina i trećina predstavljaju, jasno je i posve prirodno da će kod $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ zbrajati brojnik s brojnikom i nazivnik s nazivnikom. Tko normalan ne bi učinio isto ako ne razumije o čemu se radi? Pa tako su se, zaboga, zbrajali prirodni brojevi! Da stvar bude gora: trenutak kada učenik zbroji brojnik s brojnikom i nazivnik s nazivnikom obično je trenutak kada nastavnik pozeleni i zaurla, a učenik, novopečeni šestaš zaključi da ipak ne voli matematiku.

Stoga je u petom razredu važno dobro uvesti pojam razlomka i ne srljati prerano sa zapisivanjem razlomaka, već naglasak staviti na mentalno razumijevanje polovine, trećine, šestine, triju četvrtina itd.

Problemi vezani uz razlomke

Učeničke probleme u razumijevanju razlomaka u odnosu na prirodne brojeve dobro je sistematizirao Winter (1999.). On pod naslovom *Stari brojevi – novi brojevi, opći problemi pri proširenju skupa brojeva* navodi niz problema kod razlomaka u odnosu na prirodne brojeve. Naime, svojstva prirodnih brojeva i računanje u skupu $\mathbf{N}$, koje učenici sustavno usvajaju od prvog razreda, ne vrijede kod razlomaka i to može uzrokovati probleme u shvaćanju pojma razlomaka. U nastavku slijede Winterove opaske zajedno s dodatnim problemima koje sam primijetila u praksi*. Možemo ih podijeliti na osnovne probleme u shvaćanju pojma razlomka, probleme kod zapisivanja razlomaka, probleme u uspoređivanju razlomaka te probleme kod računskih operacija s razlomcima.

* Zahvaljujem kolegici Sonji Banić na korisnim idejama i savjetima vezanim uz temu članka.

1. PROBLEMI U SHVAĆANJU POJMA RAZLOMKA

- Do problema razumijevanja pojma razlomka većinom dolazi zbog preranog uvođenja simboličkog zapisa i preskakanja mentalnih aktivnosti usredotočenih na bit (ideju) razlomka. Učenik bi prvo trebao razumjeti pojam razlomka bez preranog opterećivanja zapisivanjem $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ i manipuliranjem simbolima. A i kada se usvoji zapis, trebalo bi pripaziti da ideja razlomka ostane u prvom planu.
- S obzirom na to da su osnovni razlomci dio svakodnevnog života, razlomci oblika **polovina**, **trećina** i **četvrtina** trebali bi biti sadržani u matematičkom gradivu već od nižih razreda osnovne škole. Zadaci u natjecanju "Klokan" već od najmlađe skupine "Leptirići" (2. razred osnovne škole) sadrže zadatke u kojima je potrebno razumjeti osnovni koncept razlomaka. Također, međunarodno ispitivanje matematičkog znanja TIMSS (koje se ove godine provodi i kod hrvatskih učenika četvrtih razreda osnovne škole) zahtijevalo je, između ostalog, i poznavanje osnovnih razlomaka. Usput, i u prvim hrvatskim računicama (Šilobod, 1758.; Zoričić, 1766.) osnovni razlomci potrebni u svakodnevici prikazani su odmah nakon četiri osnovne računske operacije.
- Kod prirodnih brojeva broj i računski zadatak uvijek odgovaraju na pitanje "**Koliko (jedinica)?**". Kod razlomaka to više nije slučaj jer se pitanje može odnositi i na **udio** u cjelini. Ova činjenica obično je razumljiva sama po sebi kod odraslih, ali kod djece koja poznaju jedino prirodne brojeve može stvarati zabunu i prepreku u razumijevanju zadataka s razlomcima.
- Pitanja tipa "Koliko jedno cijelo ima..." trebala bi se što više postavljati uz zahtjev usmenog ili pismenog obrazloženja (u razrednoj diskusiji, za domaću zadaću, prilikom vježbanja i u testovima). Dakle, učenik bi bez zapisivanja trebao znati izračunati, pokazati na modelima i objasniti koliko jedno cijelo ima sedmina, šestina itd. Ne samo koliko ima jedno cijelo, već i koliko imaju dva cijela, te npr. koliko dva cijela i jedna polovina imaju polovina (ili četvrtina) i sl. Ovdje se zapravo radi o pretvaranju mješovitih brojeva u razlomke, ali na konkretnoj i mentalnoj razini bez upotrebe simbola. U ove zadatke dobro bi se uklopile autentične situacije, kao npr. "Od koliko poluvremena se sastoji nogometna utakmica, od koliko četvrtina se sastoji košarkaška ili vaterpolska utakmica, od koliko trećina se sastoji hokejaška utakmica" itd.

2. PROBLEMI KOD ZAPISIVANJA RAZLOMAKA

- Kada savladamo ideju razlomka i krenemo na simbolički prikaz razlomka, trebamo biti svjesni da se zapis razlomka razlikuje od dosadašnjeg aditivno-multiplikativnog zapisa prirodnih brojeva. Naime, svaki prirodan broj ima samo jedan naziv i simbol koji se sastoji od niza znamenaka određenih mjesnih vrijednosti. S druge strane, činjenica da se jedan te isti razlomak može zapisati na beskonačno mnogo načina učenicima također može predstavljati problem. Primjerice:

$$1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{15}{10}=\frac{270}{180}=\ldots=1.5=1.500=\ldots$$

- Simboli $\frac{1}{10}$ i 0.1 drugačije se čitaju, iako označavaju isti broj, na što učenicima također treba obratiti pažnju. Također, simboli $\frac{1}{8}$ i ♪ čitaju se slično. Ove moguće probleme možemo pretvoriti i u prednosti (koristeći ih za diskusiju: kada se koristi jedno, a kada drugo, koje su sličnosti, a koje razlike među njima i sl.).
- Kada učenike upoznamo sa simboličkim zapisivanjem razlomaka, i ovdje se javljaju određeni problemi. Većina tih problema izvire iz nepoznavanja osnovne ideje, ali neki problemi dolaze i iz nepovezivanja ideje s prikazom. Primjerice:

$$\frac{3}{5}\neq 3.5,$$

$$2\frac{3}{5}\neq 2\cdot\frac{3}{5}.$$

Ovdje bi učenicima posebno trebalo skrenuti pažnju na različite zapise (npr. preko panoa), poticati obrazlaganje i ovakve zadatke davati pri vježbanju i provjeri znanja. U provjerama znanja moguće je tražiti i tumačenje zašto gornji prikazi nisu jednaki.

3. PROBLEMI KOD USPOREĐIVANJA RAZLOMAKA

- Ako gledamo strogo simboličku razinu, uspoređivanje razlomaka uopće nije intuitivno, pogotovo u odnosu na prirodne brojeve. Mnogim učenicima nije jasno kako, primjerice, $\frac{153}{154}$ može biti manje od 1, ili kako to da je $\frac{1}{10}$ manja od $\frac{1}{9}$. Neki udžbenici čak daju posebna simbolička pravila za uspoređivanje razlomaka oblika $\frac{1}{n}$. Naravno da su ovo prepreke ako se razlomcima pristupa isključivo ili pretežno na simboličkoj razini. O uspoređivanju razlomaka tipa $\frac{7}{9}$ i $\frac{4}{5}$ da i ne govorimo (daju se pravila unakrsnog množenja na razini simbola, bez razumijevanja smisla uspoređivanja). Simbolički prikazi za uspoređivanje razlomaka (tipa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *akko* je $ad = bc$) trebali bi biti konačan zaključak do kojeg učenici dolaze generalizacijom, a ne pravilo koje im se nameće na početku da ga slijepo slijede.
- Svaki prirodan broj ima svog sljedbenika i prethodnika (osim najmanjeg broja), dok u skupu racionalnih brojeva ne možemo više govoriti o prethodniku i sljedbeniku. Također, gustoća skupa $\mathbf{Q}$ izuzetno je važno svojstvo koje bi se svakako trebalo pošteno obraditi u šestom razredu jer ono pomaže shvaćanju pojma skupa razlomaka.

4. PROBLEMI VEZANI ZA RAČUNSKE OPERACIJE S RAZLOMCIMA

- Kod prirodnih brojeva svaka računska operacija $a + b$, $a - b$ (kada je $a > b$), $a \cdot b$ i $a : b$ (kada je a višekratnik od b) može se neposredno provesti preko znamenaka brojeva a i b i donosi kao rezultat opet prirodan broj (Winter, 1999.). U skupu $\mathbf{Q}$ to ne mora biti slučaj, a neki učenici teško prihvaćaju ove promjene ili ih čak uopće ne primijete.
- Osim spomenutih problema kojima se grade temelji za razumijevanje pojma razlomka, pravi **lomovi** događaju se kod uvođenja pravila za računske operacije s razlomcima. Zašto jedna polovina i jedna trećina jednostavno ne bi bile dvije petine? Također, učenik se s pravom može pitati: "Ako ne smijem zbrajati tako da brojnik zbrajam brojnikom, a nazivnik nazivnikom, zašto to pravilo mogu koristiti kod množenja razlomaka? Kod množenja brojnik množimo brojnikom, a nazivnik nazivnikom. Zašto?" Koliko se u nastavi matematike na to skreće pažnja?
- Zahtjev korištenja konkretnog materijala, razvijanja usmenog i pismenog izražavanja, mentalnog računanja pa tek onda korištenja simbola posebno se odnosi na pojam razlomaka. Samo dobra osnova s konkretnim materijalom i slikama daje garanciju za uspjeh u kasnijem snalaženju sa simbolima. Prijelaz između rada s konkretnim materijalima i simboličkog računanja treba biti tzv. **mentalno računanje** gdje učenik bez upotrebe simbola obrazlaganjem rješava napamet jednostavnije zadatke i time pokazuje da je razumio koncept.
- Množenje razlomaka donosi još jednu novu nevolju: prilikom množenja razlomaka možemo dobiti manji umnožak od obaju faktora. To je fenomen koji je nezamisliv u dosadašnjem učeničkom poimanju množenja u skupu $\mathbf{N}$, koje doslovce do tada znači "umnožavanje", tj. povećavanje.
- Dijeljenje s razlomcima također donosi zabune jer se može dogoditi da dijeljenjem dobijemo veći količnik od djeljenika. Ovo svojstvo također učenicima može stvarati probleme jer je takav rezultat u skupu $\mathbf{N}$ nezamisliv. Heymann (1996.) opisuje primjer intervjua s učenicom koja ne želi prihvatiti činjenicu da dijeljenjem 2 s $\frac{1}{4}$ dobiva 8, dakle rezultat veći od 2. Sve nastavnikove argumente ona odbacuje i na kraju se miri da je to tako **zato što matematičari kažu da je tako, iako nema logike**. S ovakvim se mirenjem učenika nikako ne bismo trebali zadovoljiti. No još je strašnija činjenica da se mnogi učenici uopće ne čude rezultatu (za razliku od ove učenice iz intervjua) i da samo slijede pravilo "dijeli se tako da se pomnoži s recipročnim djeliteljem".

Primjećujemo da većina spomenutih problema proizlazi iz nedostatka vremena za kvalitetno usvajanje pojma razlomka, ali i zbog nedovoljno razvijenog senzibiliteta za ključne točke s kojima učenici imaju problema. Nastavnici i autori udžbenika svakako bi trebali biti svjesni ovih poteškoća na koje nailaze učenici prilikom usvajanja pojma razlomaka, kao i prilikom računanja s razlomcima. Metodičari bi trebali dublje istražiti problem i zajedno s nastavnicima predložiti mogućnosti kako prevladati ove teškoće. No odgovornost također leži i na učenicima i roditeljima. Naime, kod razlomaka kao "novih brojeva" koji se uvode, posebno dolazi do izražaja imperativ kontinuiranog **vježbanja u nastavi matematike**. Vježbanje je također jedan od preduvjeta uspjeha, iako je kod mnogih učenika vrlo omraženo i često okarakterizirano kao "dosadno". O metodama smanjivanja monotonosti kod vježbanja možemo razgovarati, ali sam imperativ vježbanja s ciljem usvajanja gradiva i dalje ostaje neprikosnoven stup u nastavi matematike.

Savladavanje teškoća

Prvi korak u savladavanju teškoća i pogrešnih predodžbi (miskoncepcija) je detektiranje i popisivanje problema koje učenici imaju s razlomcima. Winter (1999.) opisuje te miskoncepcije kao "nezaobilazne i ne tako jednostavno metodički obradive teškoće u računanju s razlomcima" (ibid, str. 18). Teškoće se mogu shvatiti i kao tzv. epistemološke **misaone prepreke** koje mogu biti poticaj u obrazovanju i u sadržajima (Prediger, 2004.). Jasno je da se procesi usvajanja gradiva kod učenika ne usvajaju linearno, već se učenici svako malo nađu pred određenom preprekom i izazovom. Jedna je od tih prepreka i odbacivanje dosadašnjeg mišljenja da razlomci imaju navedena svojstva prirodnih brojeva. Specifične misaone prepreke trebale bi postati povod za poučavanje i dio nastavnih sadržaja. Primjerice, karakteristika da dijeljenjem broja s $\frac{1}{2}$ dobivamo veći količnik trebala bi biti sastavni dio nastavnog mikroplana (a ne samo usputna napomena nastavnika) jer učenicima predstavlja novu prepreku u usvajanju gradiva. Uzajamnost između prepreka i njihova savladavanja najvažnije je kod razumijevanja gradiva. Pitamo se je li učenik koji je samo slijepo naučio "pravilo" zbrajanja ili množenja razlomaka zapravo **savladao** prepreku ili ju je samo pokušao **zaobići** u šestom razredu, kako bi se u prvom razredu srednje škole našao pred zidom. I potiče li naš školski sustav medvjeđe usluge neprimjerenim zaobilaženjem prepreka, umjesto da se s njima suočavamo? Misaone prepreke povezane su s predodžbama, idejama i značenjima matematičkih ideja i trebale bi biti sastavni dio matematičkog obrazovanja (Prediger, 2004.).

Prijedlozi za aktivnosti u razredu

Kako ne bi sve ostalo na teoretiziranju, u nastavku slijede neki konkretni prijedlozi za rad u razredu. Predlažem korištenje tzv. višeslojnih zadataka u radu s razlomcima, zatim aktivnosti suprotstavljanja, poticanje pismene i usmene verbalizacije te traganje za namjerno postavljenim pogreškama.

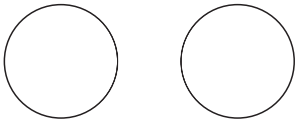
Primjer 1: Višeslojni zadaci

Višeslojni zadatak sastoji se ne samo od računanja, već i od drugih matematičkih aktivnosti poput crtanja, interpretiranja i argumentiranja. Brojni zadaci računanja koje nalazimo u zbirkama zadataka ne daju garanciju da je učenik razumio gradivo, već samo da je eventualno uvježbao neko pravilo (tj. recept).

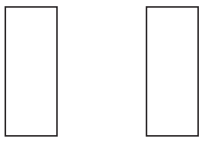
Tipičan zadatak za zbrajanje razlomaka u šestom razredu je: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$. To je zatvoreni zadatak simboličkog tipa koji od učenika traži računanje.

Prijedlog višeslojnog zadatka (varijacija na gornji zadatak):

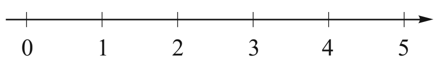
a) Nacrtaj dva jednaka kruga. U prvom krugu oboji njegove tri četvrtine, a u drugom krugu oboji pola kruga. Pogledaj slike i razmisli koliko je zajedno obojano. Posluži se škarama i rezanjem krugova.



b) Oboji $\frac{3}{4}$ prvog stupca te $\frac{1}{2}$ drugog stupca. Pogledaj slike i razmisli koliko bi bilo $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$. Nacrtaj rješenje. Za ovaj zadatak možeš se poslužiti i dinamičnim primjerom na internetskoj stranici `http://tinyurl.com/mis61`.

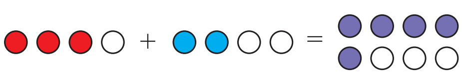


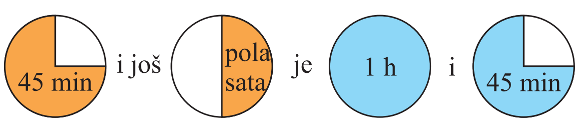
c) Na brojevnom pravcu pronađi točku A kojoj su pridružene $\frac{3}{4}$, a zatim iza te točke nanesi još $\frac{1}{2}$. Koliko je $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$? Objasni.

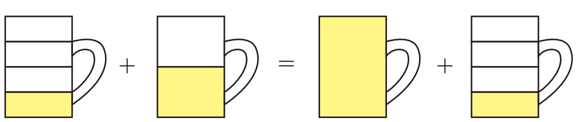


d) Izračunaj svođenjem na zajednički nazivnik $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$. Objasni kakve veze svođenje na zajednički nazivnik ima sa slikama u a), b) i c) zadatku.

e) Koja od ovih slika i rečenica prikazuje zbrajanje $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$? Objasni i ispravi pogreške:







"Tri četvrtinke i još polovinka traju kao jedna cijela nota i još jedna četvrtinka."

f) Marko je izračunao $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}$. Možeš li pogoditi kako je Marko došao do svog rezultata? Kako bi objasnio Marku zašto nije u pravu?

g) Želimo pričom prikazati zbrajanje $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$. Nastavi započet zadatak: Iva je uzela dvije jabuke. Prvu je podijelila na čevrtine...

h) Riječima iskaži pravilo za zbrajanje razlomaka i objasni ga.

i) Izračunaj: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}+\frac{2}{2}, \frac{3}{4}+\frac{3}{2}, \frac{3}{4}+\frac{4}{2}, \frac{3}{4}+\frac{5}{2}$. Nastavi i dalje. Što primjećuješ? Kako rješenja izgledaju na brojevnom pravcu?

Ovi zbrojevi mogu se zapisati u obliku $\frac{3}{4}+\frac{n}{2}$, pri čemu n može biti bilo koji prirodan broj. Koje zbrojeve ćemo dobiti ako je n neparan broj?

j) Izračunaj zbrojeve $\frac{n}{4}+\frac{1}{2}$ ako je n prirodan broj (tj. n može biti 1, 2, 3, 4, 5, 6,...).

Ovaj višeslojni zadatak u sebi sadrži aktivnosti prikazivanja, računanja, interpretiranja te obrazlaganja matematičkog gradiva. Višeslojni zadaci se ne moraju koncentrirati samo na jedno zbrajanje (kao u ovom primjeru gdje se zbrajalo samo $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$), već mogu sadržavati zbrajanja s različitim pribrojnicima. Cilj je **od zornog doći do apstraktnog** i poželjno je da se pri kraju zadatka nađe zahtjevniji zadatak s poopćavanjem ili refleksijom. Na taj način se poštuju razlike u učeničkim kapacitetima jer učenici mogu rješavati zadatke prema svojim mogućnostima. Ovakvi zadaci pogodni su za vježbanje, ali i za provjeru znanja.

Primjer 2: Suprotstavljanje različitosti

Jedan od efikasnog načina savladavanja problema jasno je isticanje razlika između poznatih prirodnih brojeva i razlomaka. Pogotovo je vrijedno ako učenici sami pokušaju pronaći te razlike i objasniti ih. Suprotstavljanje različitosti može se provesti, primjerice:

- kroz izradu plakata (ili tablice u bilježnicu) o sličnostima i razlikama između prirodnih brojeva i razlomaka;
- kroz izradu plakata o tome zašto se razlomci zbrajaju svođenjem na zajednički nazivnik, a ne zbrajanjem brojnika i brojnika, te nazivnika i nazivnika;
- kroz izradu mentalnih mapa i sl.

Suprotstavljanje različitosti također može biti dio višeslojnog zadatka.

Primjer 3: Verbalizacija

Iako pravi matematički jezik teži asketskom i preciznom izražavanju ideja, u procesu matematičkog obrazovanja vrlo je važno poticanje pismene i usmene verbalizacije, pogotovo u osnovnoj školi. Objašnjavanje, argumentiranje, iskazivanje pravila i dokazivanje svojim riječima te prepričavanje i kreiranje tekstualnih zadataka i matematičkih priča pomaže u boljem usvajanju matematičkih pojmova. Također, vrlo je vrijedno poticati učeničke diskusije o važnim pitanjima u vezi s pojmom razlomka, kao i o algoritmima za računanje s njima. Verbalizacija svakako treba biti dio višeslojnog zadatka (u Primjeru 1 verbalizacija se potiče kod svakog "objasni", "iskaži pravilo", kao i kod izmišljanja zadatka s računom).

Primjeri poticanja verbalizacije na temu razlomaka su, primjerice:

- Na primjeru kriški *pizze* nacrtaj i objasni zašto je $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$;
- Napiši izvještaj o sličnostima i razlikama između razlomaka i prirodnih brojeva. Pritom trebaš upotrijebiti ove riječi: proširivanje, skraćivanje, gust, sljedbenik, prethodnik, umnožak, količnik, uspoređivanje;
- Napiši priču "Razlomak u zemlji prirodnih brojeva";
- Katarina** je za zadaću dobila zadatak $2 : \frac{1}{4}$. Primijenila je pravilo da se djeljenik pomnoži s recipročnim djeliteljem i dobila rezultat 8. Taj rezultat ju je zbunio: "Kako količnik može biti veći od 2? Pa dijelila sam!" rekla je.

  a) Je li i tebi čudno što se dijeljenjem s $\frac{1}{4}$ dobiva veći broj od 2? Zašto je čudno?
  b) Kako bi joj objasnio/objasnila zašto se dobiva veći broj?

  c) Možeš li zadatak $2 : \frac{1}{4}$ pretvoriti u zadatak riječima iz svakodnevnog života, kako bi joj bilo jasnije o čemu se radi?

** Ideja za ovaj zadatak preuzeta je iz Prediger (2004.).

Primjer 4: Traganje za pogreškama

Traganje za pogreškama također može biti dio višeslojnog zadatka, ali i samostalni zadatak. Primjer traganja za pogreškama i njihova ispravljanja može se naći u Primjeru 1 (zadaci e) i f)). Također, računski zadatak može biti postavljen tako da učenik dobije gotov postupak u kojem treba pronaći pogrešku, ispraviti je i objasniti što je krivo (kao da ispravlja nečiji test).

Sve ove aktivnosti i gore nabrojani problemi ukazuju na potrebu da se trebamo uhvatiti u koštac s problemima vezanim uz shvaćanje razlomaka i računanje s njima. Izbjegavanje problema sakrivanjem u gotove recepte za računanje s razlomcima definitivno nije rješenje. Usvajanje pojma razlomaka i računskih operacija s njima treba biti važna i čvrsta karika u učenikovu znanju matematike. Ovaj imperativ ne odnosi se samo na razlomke, već na cijelo gradivo šestog razreda matematike jer je ono važan preduvjet svih kasnijih uspjeha u matematici i općem školovanju.

LITERATURA

1/ Glasnović Gracin, D. (neobj.): *Requirements in Mathematics Textbooks and PISA Assessment.* Neobjavljena doktorska disertacija, Alpen-Adria-Universität, Klagenfurt.

2/ Heymann, H.W. (1996.): *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz, Weinheim.

3/ IDM – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – IFF, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (2007): *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07*. Klagenfurt.

4/ MZOS (2006.): *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. HNOS, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, Zagreb.

5/ Prediger, S. (2004.): *Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?* Mathematik lehren Heft, 123, str. 10–13.

6/ Šilobod Bolšić, M. (1758.): *Arithmetika Horvatszka*. Zagreb (pretisak: Samoborski muzej, Samobor, 2008.).

7/ Winter, H. (1999.): *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. Manuskript, RWTH Aachen.

8/ Zoričić, M. (1766.): *Aritmetika.* Jakin (Ancona), (pretisak: Gradska knjižnica "Juraj Šižgorić", Šibenik, 1995.).