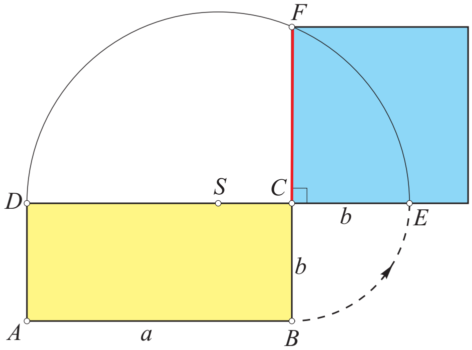
Hipokratove lunule

Branimir Dakić, Zagreb

Kvadratura lika

Problem konstrukcije kvadrata čija je površina jednaka površini nekog lika u ravnini poznat je kao **problem kvadrature lika**. Pod pojmom "konstrukcija" podrazumijeva se ona geometrijska konstrukcija pri čijoj se provedbi rabe isključivo ravnalo i šestar, odnosno pravac i kružnica bilo kojeg polumjera. Zadatke ove vrste nije teško riješiti ako trebamo "kvadrirati" neki mnogokut. Pa pogledajmo kako se to može učiniti.

Neka je dan pravokutnik $ABCD$ sa stranicama duljina a i b. Konstruirajmo kvadrat površinom jednak tom pravokutniku.

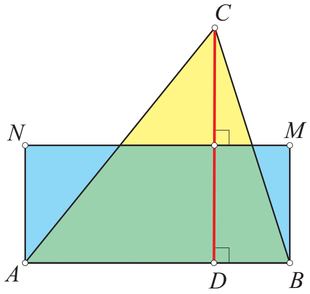


Na pravcu DC odredimo točku E, tako da je $|CE| = b$. Nad dužinom $\overline{DE}$ opišimo kružnicu. U točki C postavimo okomicu na istu dužinu. Točka F sjecište je te okomice i kružnice. Dužina $\overline{CF}$ stranica je kvadrata čija je površina jednaka površini pravokutnika $ABCD$. Naime, vrijedi: $|DC| = a$ te $|CE| = b$ pa po **Euklidovu poučku**, koji kaže da je visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta geometrijska sredina odsječaka na koje njezino nožište dijeli hipotenuzu, imamo

$$|CF|^2 = a \cdot b.$$

Primijetimo samo da je trokut DEF pravokutan prema **Talesovu poučku** o obodnom kutu nad promjerom kružnice.

Kvadratura pravokutnika drugi je korak u kvadraturi trokuta. Prvo dani trokut pretvorimo u pravokutnik jednake površine, a to je uistinu vrlo jednostavna konstrukcija:

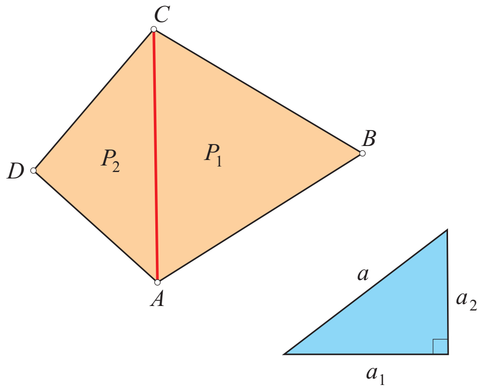


Neka je dan trokut ABC. Odredimo polovište visine $\overline{CD}$ pa konstruirajmo pravokutnik $ABMN$. Površina tog pravokutnika jednaka je površini trokuta ABC:

$$P(ABMN) = |AB| \cdot \frac{1}{2}|CD| = P(\triangle ABC).$$

Sada za dobiveni pravokutnik već poznatim postupkom konstruiramo kvadrat jednake površine.

Kako kvadrirati bilo koji mnogokut? Niti na ovo pitanje nije teško doći do odgovora. Prikažimo kako to učiniti za bilo koji četverokut $ABCD$.



Dijagonalom $\overline{AC}$ podijelimo četverokut na dva trokuta. Neka je $P(\triangle ABC) = P_1$, $P(\triangle ACD) = P_2$. Za svaki od dva trokuta konstruirajmo kvadrate jednakih površina. Neka su duljine stranica tih kvadrata jednake a_1 i a_2. Konstruirajmo sada pravokutni trokut s katetama duljina a_1 i a_2. Hipotenuza a tog trokuta stranica je kvadrata površinom jednakog četverokutu $ABCD$. Naime vrijedi:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 = P_1 + P_2 = P(ABCD).$$

Kako mnogokut možemo dijagonalama iz jednog vrha izrezati na trokute, jasno je na koji se način može provesti konstrukcija njegove pretvorbe u kvadrat jednake površine.

Sve ovo što je izloženo, jednostavno je i odavna poznato. Prirodno je što se nadovezalo pitanje konstrukcije kvadrata površinom jednakom nekom liku u ravnini koji je omeđen zakrivljenim crtama, prije svega kružnim. Tako se pojavio i naoko po zahtjevnosti najjednostavniji problem određivanja kvadrata čija je površina jednaka površini danog kruga. Jedan je to iz trojke čuvenih antičkih problema, poznat kao **kvadratura kruga**. Ostala su dva **trisekcija kuta** i **podvostručenje kocke** (poznat još i kao **Delijski problem**), od kojih prvi zahtijeva konstrukciju kojom bi se dani kut podijelio na tri sukladna kuta, a drugi određivanje brida kocke koja bi imala dvostruko veći obujam od obujma zadane kocke. I opet naglašavamo kako "konstruirati" znači koristiti se isključivo ravnalom i šestarom.

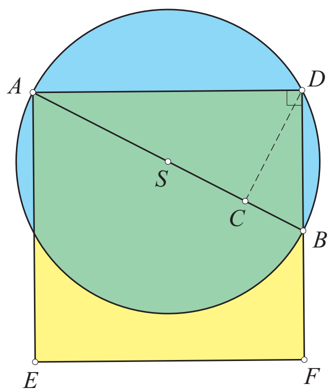
Nijedan od triju navedenih problema uz dano ograničenje nije rješiv. To je relativno jednostavno dokazati za trisekciju kuta i podvostručenje kocke, ali za kvadraturu kruga baš i ne. Naime, problem se sastoji u tome da se za krug polumjera r konstruira kvadrat s duljinom stranice a, tako da vrijedi:

$$r^2\pi = a^2.$$

Valja dakle konstruirati dužinu duljine $a = r\sqrt{\pi}$. Umnožak dviju dužina nije problem konstruirati. Nije problem konstruirati ni dužinu koja je korijen iz neke dužine. Ali ono što je nemoguće jest konstruirati dužinu duljine π. Upravo je ta činjenica razlog zbog kojeg je kvadratura kruga "nemoguća misija". Dokaz da je to tako uslijedio je tek u 19. st. kad su se razvila do tada nepoznata matematička znanja, posebice iz područja algebre, znanja koja su probleme geometrijskih konstrukcija povezali s rješivošću algebarskih i transcedentnih jednadžbi. Naime, svi su **konstruktibilni brojevi** algebarski, tj. korijeni su algebarskih jednadžbi s racionalnim koeficijentima. Godine 1882. njemački matematičar Ferdinand Lindemann (1852. – 1939.) dokazao je da je broj π transcedentan, da nije dakle korijen nikoje algebarske jednadžbe s racionalnim koeficijentima pa je time ujedno dokazano kako nije moguće ravnalom i šestarom konstruirati dužinu čija je duljina jednaka π. Drugim riječima, problem kvadrature kruga je nerješiv.

Malo povijesti

Kvadratura kruga vrlo je star problem i tijekom stoljeća njime su se bavili mnogi matematičari, ali i brojni amateri od kojih su mnogi, ne razumjevši matematičku argumentaciju, naivno vjerovali da su pronašli rješenje. Poznata su razna aproksimativna rješenja, od kojih evo jednog od jednostavnijih koje je vjerojatno nadahnuto Arhimedovim rezultatom da je $\pi \approx 3\frac{1}{7}$:



Neka je $\overline{AB}$ promjer kruga sa središtem u točki S i polumjerom r. Dužinu $\overline{AB}$ podijelimo na 14 jednakih dijelova te odredimo na njoj točku C koja je dijeli u omjeru $11 : 3$. Položimo zatim okomicu u točki C na AB i neka ona kružnicu siječe u točki D. I konačno, konstruirajmo kvadrat $EFDA$ nad dužinom $\overline{AD}$. Površina ovog kvadrata približno je jednaka površini kruga.

Primijetimo da je trokut ABD pravokutan s pravim kutom pri vrhu D (Talesov poučak). I sada računamo:

$$\begin{aligned} P(EFDA) &= \text{(Euklidov poučak)} \\ &= |AD|^2 = |AB| \cdot |AC| = 2r \cdot \frac{11}{14} 2r \\ &= \frac{22}{7} r^2 \approx 3.14285 r^2. \end{aligned}$$

Uočavamo kako je ovom jednostavnom konstrukcijom relativno dobro "kvadriran" dani krug jer je postignuta točnost broja π na dvije decimale.

Dodajmo na kraju ovog dijela kako je danas sintagma "kvadratura kruga" opća metafora za neki problem ili zadatak za koji je intuitivno jasno da je nerješiv ili neprovediv pa se često rabi u novinskim napisima kao svojevrstan oblik zornosti.

Naš je cilj u ovom članku prikazati neke zanimljive probleme kojima se među prvima bavio grčki filozof i matematičar Hipokrat iz Hiosa i u kojima se provodi kvadratura lunula. **Lunule** su konkavni dijelovi ravnine omeđeni lukovima dviju kružnica.

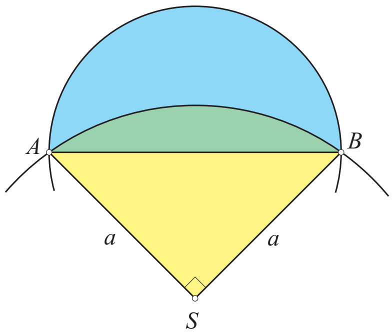
Recimo koju riječ i o samom Hipokratu, premda o njemu baš i nema pouzdanih i osobitih povijesnih tragova. Rođen je na malom otoku Hiosu u Egejskom moru. Živio je u 5. stoljeću prije Krista i bavio se, kao i Tales, trgovinom "na veliko". U povijesnim zapisima može se pročitati kako je bio naivan pa su ga neki kupci izvarali. Druga priča kaže da su njegove brodove krcate robom opljačkali gusari. Bilo kako bilo, očajan i osiromašen zaputio se u Atenu ne bi li našao pravicu i oporavio svoj imetak. Pri tom traganju, koje je potrajalo, Hipokrat je upoznao neke mudre ljude koji su ga zaveli na izučavanje geometrije. U tome je bio neusporedivo uspješniji nego li u trgovini. Danas se Hipokrata smatra jednim od najvećih geometričara u povijesti. Bio je prvi (prije Euklida) koji je pokušao posložiti geometriju u deduktivan logički sustav i prema nekim povijesnim tragovima napisao je kapitalno djelo "Osnove geometrije", koje nažalost nije sačuvano. Danas je Hipokrat najpoznatiji po svojim radovima o lunulama pa se tako uvijek kad je o njima riječ govori o **Hipokratovim lunulama**. Ti su njegovi radovi najvjerojatnije potaknuti rješavanjem problema kvadrature kruga u čiju je rješivost Hipokrat bio uvjeren upravo zbog uspjelih kvadratura lunula.

Vjeruje se kako je Hipokrat poznavao tri vrste lunula i riješio problem njihove kvadrature. Prvi je problem vezan uz jednakokračan pravokutni trokut.

Kvadratura lunule

Trokut ASB je jednakokračan i pravokutan. Kružnica oko S koja prolazi točkama A i B i polukružnica nad $\overline{AB}$ određuju lunulu. Dokažimo da je površina lunule (plavo) jednaka površini trokuta (žuto).

Prvo ćemo pokazati da je površina (P_1) polukruga nad $\overline{AB}$ jednaka površini (P_2) kružnog isječka ASB: $P_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi = \frac{a^2}{4}\pi$. A očito je $P_2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 \pi$ te je $P_1 = P_2$.



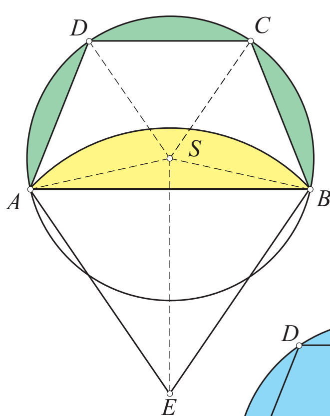
Kad i od P_1 i od P_2 oduzmemo površinu kružnog odsječka (zeleno) dobit ćemo isto, a to je i bila tvrdnja.

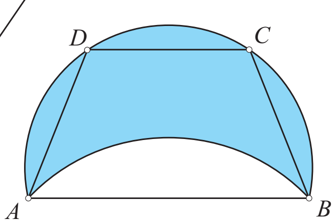
Drugi je primjer vezan uz trapez.

Neka je dan jednakokračan trapez čije su duljine stranica u sljedećem omjeru $|AB| : |BC| : |CD| : |DA| = \sqrt{3} : 1 : 1 : 1$.

Trapezu opišimo kružnicu (to je izvedivo za svaki jednakokračan trapez) sa središtem u točki S. Zatim konstruirajmo trokut ABE koji je sličan trokutu ASD.

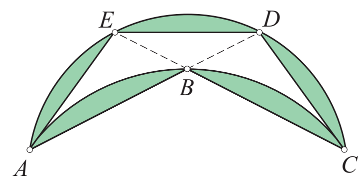
Zbroj površina triju sukladnih odsječaka (zeleno) kruga sa središtem S i s osnovkama $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ i $\overline{CB}$ jednak je površini odsječka (koji im je sličan s koeficijentom sličnosti $\sqrt{3}$) kruga sa središtem u E





i s osnovkom AB (žuto). Dakle, površina trapeza $ABCD$ jednaka je površini obojane lunule (plavo).

Još se jedna vrsta lunula pripisuje Hipokratu iz Hiosa. U njima je konstrukcija lunule vezana uz konkavni peterokut kojem su duljine uzastopnih stranica u omjeru $\sqrt{3} : \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{2} : \sqrt{2}$.

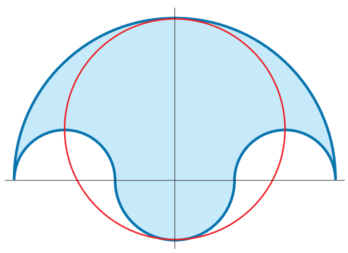


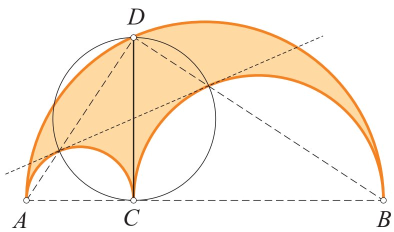
Ruski matematičari Čebotarjov i Dorodnov pokazali su kako se ovaj niz zaključuje s lunulama konstruiranim za šesterokut i osmerokut. No ova dva slučaja, kao i treći Hipokratov, dovoljno su složena pa ih ovdje ne obrađujemo, a čitatelje koje to zanima upućujemo na [5].

Tri zadatka

U školskoj matematici, čak i na razini osnovne škole, povijesni zadaci vezani uz krug i kružnicu mogu osvježiti nastavu matematike i doprinijeti poticaju interesa za učenje matematike. Umjesto šturih računskih zadataka znatno su sadržajniji oni "čisto" geometrijski.

Takva su prije svega dva vrlo poznata, jednostavna i lijepa Arhimedova zadatka vezana uz površine likova omeđenih kružnim lukovima. I jedan i drugi našli su svoje mjesto u MiŠ-u i to uz temu *Dokazi bez riječi*, *Soljenka* u MiŠ-u 41 (str. 15.), a *Arbelos* ili *krznarski nož* u MiŠ-u 55 (str. 211.). U prvom valja dokazati kako je površina "soljenke" (plavo) jednaka površini kruga omeđenog crvenom kružnicom, a u drugom da je površina "krznarskog noža" ili arbelosa (narančasto) jednaka površini kruga čiji je promjer dužina $\overline{CD}$.



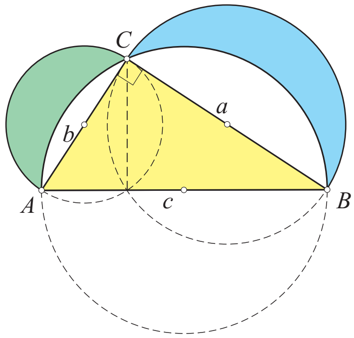


Vrlo je poznat i sljedeći zadatak, usko povezan s Hipokratovom prvom lunulom: Polukružnice opisane nad katetama pravokutnog trokuta i polukružnica opisana nad hipotenuzom određuju dvije lunule (plava i zelena). Zbroj površina tih lunula jednaka je površini trokuta (žuto).

Prvo uočimo da je zbroj površina polukrugova nad katetama a i b jednak površini polukruga nad hipotenuzom c, što izravno proistječe iz **Pitagorina poučka**. Naime, pomnožimo li jednakost $a^2 + b^2 = c^2$ sa $\pi/8$, dobit ćemo:

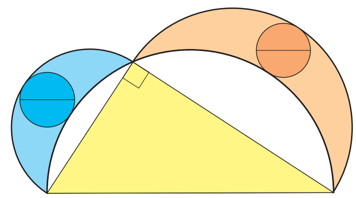
$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi.$$

Ako sada od polukrugova nad katetama oduzmemo kružne odsječke (bijelo na slici), dobit ćemo



lunule, a ako od velikog polukruga oduzmemo iste te odsječke, dobit ćemo pravokutni trokut. Od dviju jednakih veličina oduzeli smo tako jednake veličine i dobili jednake rezultate.

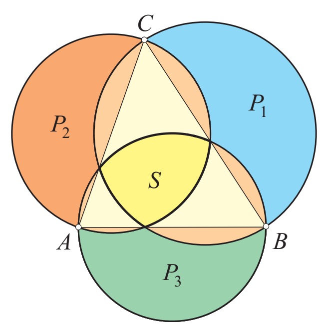
Zgodno je napomenuti kako su dvije lunule konstruirane nad katetama jednako široke. Promjeri dvaju najvećih upisanih krugova jednake su veličine, svaki od njih jednak je polovini razlike zbroja duljina kateta i duljine hipotenuze.



I još nekoliko zadatka

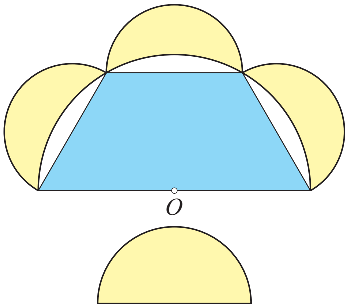
Na našem Panoptikumu prikazano je nekoliko zadataka bliskih temi ovoga članka. Crteži su izrađeni prema radovima Antonija Gutirreza. Čitateljima MiŠ-a svesrdno preporučujemo prelijepe stranice (*Geometry Step by Step, from the Land of the Incas*) [3] ovog uistinu plodnog i kreativnog matematičara. A mi ovdje dodajmo još nekoliko zadataka:

1. Stranice trokuta ABC promjeri su triju kružnica. Zbroj površina P_1, P_2 i P_3 triju likova (plavo, narančasto i zeleno) umanjena za površinu S krivocrtnog trokuta jednaka je dvostrukoj površini trokuta ABC.

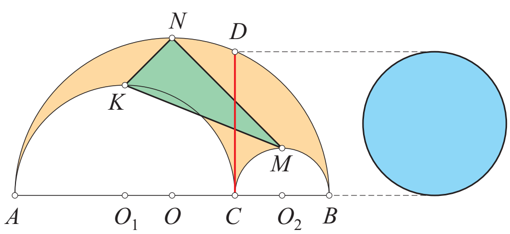


Dokaz iskazane tvrdnje izložen je u [2], a može se naći i u [4]. Napomenimo da je prelijep ruski matematičko-fizički časopis “Kvant” namijenjen nadarenim srednjoškolcima dostupan na internetskoj stranici `http://kvant.mccme.ru/`.

2. Nad tri sukladne stranice trapeza upisanog u polukružnicu konstruirane su lunule prema slici. Dokažite da je zbroj površina lunula uvećan za površinu jednog polukruga jednak površini trapeza.

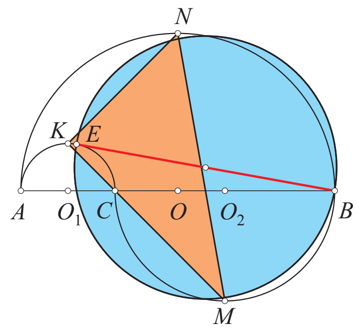


3. Na dužini $\overline{AB}$ odabrana je točka C te su nad dužinama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ s iste strane pravcu AB opisane polukružnice sa središtima u točkama O, O_1 i O_2. Tim trima polukružnicama omeđen je Arhimedov krznarski nož. Točke K, M i N dijele polukružnice na kojima leže na dva jednaka dijela. Dokažite da je omjer površina kruga s promjerom $\overline{CD}$ i trokuta KMN jednak π.

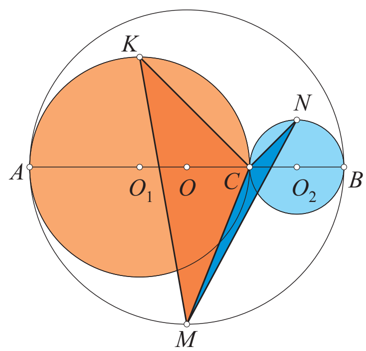


4. Neka su i sada zadane točke A, B i C i neka su nad dužinama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ opisane polukružnice sa središtima u točkama O, O_1 i O_2, s tim da je polukružnica nad $\overline{BC}$ s druge strane pravca AB od kružnica sa središtima O i O_1.

Pravac BE je tangenta položena iz B na kružnicu sa središtem O_1. Dokažite da je omjer površine kruga s promjerom $\overline{BE}$ (plavo) i površine trokuta KMN jednak π.



5. Na dužini $\overline{AB}$ odabrana je točka C te su konstruirane tri kružnice s promjerima $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ te središtima O, O_1 i O_2. Iz tih središta položene su okomice na pravac AB i tako su dobivene točke K, M i N. Dokažite da je omjer površine plavog kruga i plavog trokuta, kao i omjer narančastog kruga i narančastog trokuta jednak π.



LITERATURA

1/ L. N. H. Bunt, P.S. Jones, J.D. Bedient, *The historical roots of elementary mathematics*, Dover Publications, New York, 1976.

2/ V. N. Berezin, *Lunočki Hippokrata*, KVANT 5/1971.

3/ Antonio Gutierrez, *GoGeometry, Geometry Step by Step, from the Land of the Incas* i `http://agutie.homestead.com/`

4/ H. Rademacher, O. Toeplitz, *The enjoyment of mathematics*, Princeton University Press, Princeton 1957.

5/ Brian J. Shelburne, *The Five Quadrable (Squarable) Lunes*, `http://www3wittenberg.edu/bshelburne/TheFiveLunes120408.pdf`