

Matematičke igračke

Branimir Dakić, Zagreb



O **rekreacijskoj matematici** i njezinoj ulozi u nastavi matematike već je u MiŠ-u bilo riječi. Ne od danas uvažena je to grana matematike, što se dobrim dijelom može zahvaliti činjenici da su se njome u povijesti bavili i veliki matematičari.¹ Neke su zagonetke potaknule i razvitak čitavih matematičkih teorija.

U ovom broju MiŠ-a o jednoj posebno popularnoj i zanimljivoj igri, u originalu **The 15 Puzzle**, piše Ela Rac-Marinić-Kragić. Ta se igrice pripisuje Samu Loydu, jednom od najvećih imena rekreacijske matematike, a potječe iz 1878. godine. Pišući o buri koju je izazvala ova igračka, Loyd kaže kako su se ljudi toliko njome zanijali da su trgovci ostavljali zatvorenima svoje dućane, kapetani zaboravljali na kormila brodova, ratari odlagali plugove. Upravo ovo posljednje prikazano je na slici iz jedne Loydove knjige koja se nalazi uz naslov članka kolegice Ele na str. 82.

Iskoristili smo priliku da vam u Panoptikumu predstavimo još nekoliko vrlo starih matematičkih ig-

račaka od kojih su neke popularne i dan danas. Ova se vrst matematičkih igračaka uvrštava u skupinu **mehaničkih**, a još uže u **slagalice**. Uglavnom im je zadatak da se od izvjesnih dijelova složi neki zadani oblik. Jednu takvu igračku upoznali smo već u MiŠ-u (broj 46), a poznata je pod nazivom **stomakion**. Pripisuje se starogrčkom matematičaru Arhimedu, dakle potječe iz 3. stoljeća prije Krista. Tom se slagalicom možete poigrati ako ođete na <http://element.hr/plus/geogebra/stomakion> gdje se nalazi *applet* koji je u *GeoGebri* izradio Šime Šuljić.

Tangram

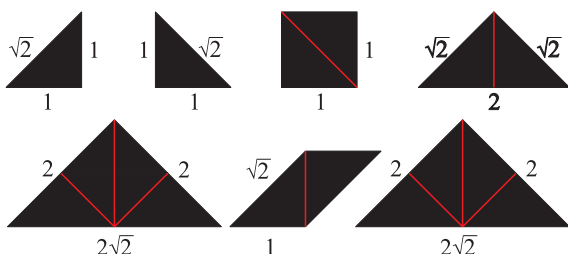
Ova vrlo stara i silno popularna igračka potječe iz Kine. Vjeruje se da je stara više od 4000 godina. Na Zapad je stigla početkom 19. stoljeća preko Amerike kamo su je donijeli pomorci. Ubrzo se proširila poput zaraze pa su o njoj objavljene brojne knjige, a nisu mogli odoljeti ni matematičari pa se o njoj

¹ Miodrag S. Petković, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, American Mathematical Society (AMS), 2009.

zanimljiva matematika

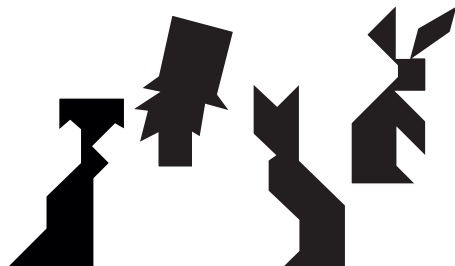
često pisalo u literaturi iz rekreacijske matematike. Tangramom je i Napoleon kratko svoje prognaničke dane.

Igračka se sastoji od sedam pločica:



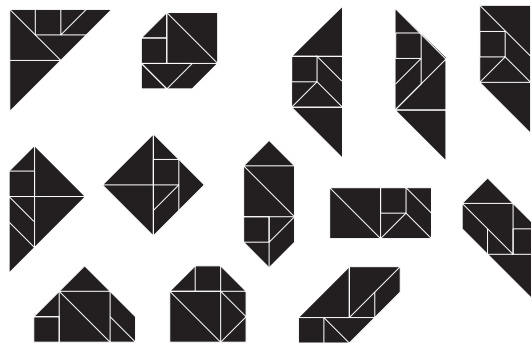
- 2 mala jednakokračna pravokutna trokuta s hipotenuzom duljine $\sqrt{2}$, katetom duljine 1, površinom $\frac{1}{2}$.
- 1 kvadrat sa stranicom duljine 1 i površinom 1.
- 1 jednakokračan pravokutni trokut s hipotenuzom duljine 2, katetom duljine $\sqrt{2}$, površine 1.
- 2 velika jednakokračna pravokutna trokuta s hipotenuzom duljine $2\sqrt{2}$, katetom duljine 2, površine 2.
- 1 paralelogram (romboid) sa stranicama duljina 1 i $\sqrt{2}$ i površinom 1.

S tih sedam dijelova može se pokriti kvadrat. No općenito, zadatak je složiti od svih sedam pločica neki lik (zadana je njegova silueta) uz uvjet da se one ne preklapaju. Do sada je objavljeno oko 6500 tangram-problema. Evo nekoliko tangram-likova iz *Alise u zemlji čuda*.

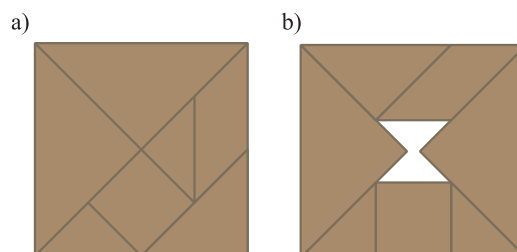


² S. W. Golomb, *Polyominoes*, Scribners, New York 1965.

Uz slaganje kojekakvih zgodnih likova mogu se postavljati i razni matematički problemi. Jedan je primjerice problem slaganja svih mogućih konveksnih mnogokuta. Ukupno ih je 13.



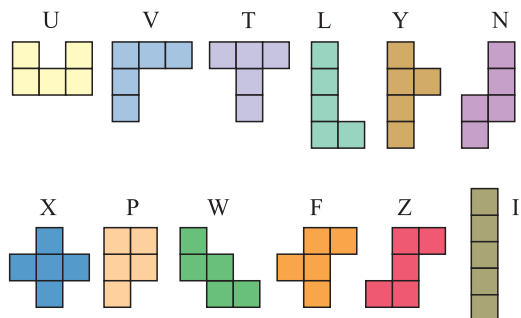
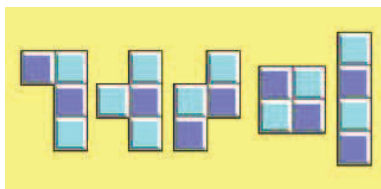
O tangramu se može naći more zanimljivog materijala na internetu. Pred čitatelje postavljamo tek još problemčić kakav se povremeno postavlja uz zadatke popločavanja. Od sedam jednakih dijelova složeni su kvadrati na slici, no na drugom su ostale dvije nepopunjene rupe. Kako je to moguće?



Polimino

Ova je popularna slagalica također vrlo stara, premda je veću pozornost izazvala tek prije stotinjak godina. Slagalica se sastoji od izvjesnog broja međusobno različitih pločica, a svaka je pločica složena od jednakog broja sukladnih kvadratića. Te pločice treba složiti u neki zadani oblik. Naziv *polimino* potječe od matematičara Solomona W. Golomba koji je problemu posvetio čitavu knjigu.²

Zanemarimo najjednostavnije polimine, domino i trimino. U prvom slučaju imamo svega jednu pločicu, u drugom dvije. Tetramino sadrži pet pločica, svaka pločica složena je od četiri sukladna kvadrata. Čitatelji Miš-a sjetit će se **tetrisa**, jedne nekad silno popularne računalne igrice.



dimenzija 6×10 (ukupno 2339 rješenja), 5×12 (1010 rješenja), 4×15 (368 rješenja) te 3×20 (2 rješenja, jedno vidimo na slici).



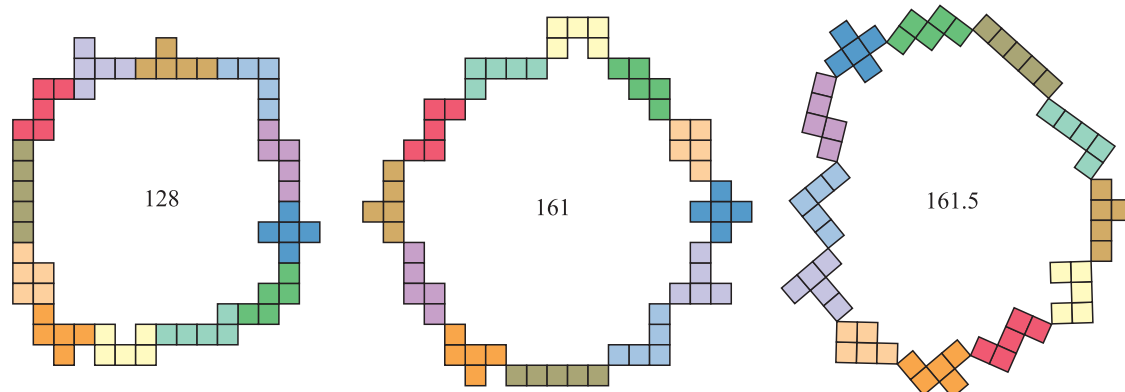
Ponekad se uz ovih pet dodaju još dvije pločice koje se dobiju rotacijom ili simetrijom prve i treće pločice. No mi se zadržimo na pet. Za takav tetramino se kaže da je "slobodne forme". Obojimo li sada sve kvadratiće dvjema bojama tako da nikoga dva susjedna nisu obojana istom bojom, dobit ćemo 11 kvadratića jedne i 9 kvadratića druge boje što pokazuje da ne možemo s ovih pet pločica popločiti pravokutnik. Naime, zamislimo li pravokutnik na šahovskoj ploči, nemoguće je da ima 11 kvadratića jedne, a 9 kvadratića druge boje. Uvijek je 10 kvadratića jedne i 10 kvadratića druge boje pa ma kakav taj pravokutnik bio.

Pentamino, čija je svaka pločica građena od pet kvadratića, ima ukupno 12 pločica.

I ovdje se postavljaju raznovrsni zadaci od kojih jedan zahtijeva da se pločicama poploči pravokutnik. Pokazuje se kako je moguće popločiti pravokutnike

No prilika je ovdje spomenuti jedno veliko ime: Donald Knuth (1938. →) vjerojatno je najveći znanstvenik uopće u području računalnih znanosti. Autor je kapitalnog trotomnog djela *The art of computer programming*. Stvorio je čudesni *TeX*, program bez kojega je nezamislivo pisanje prije svega matematičkih stručnih i znanstvenih tekstova. Knuth je dao važan doprinos Rekreacijskoj matematici osobito kroz suradnju s Martinom Gardnerom.

Uz Knutha se veže i jedan zanimljiv pentamino-problem. Svih 12 pločica treba posložiti tako da čine ogradu unutar koje je polje najveće moguće površine.



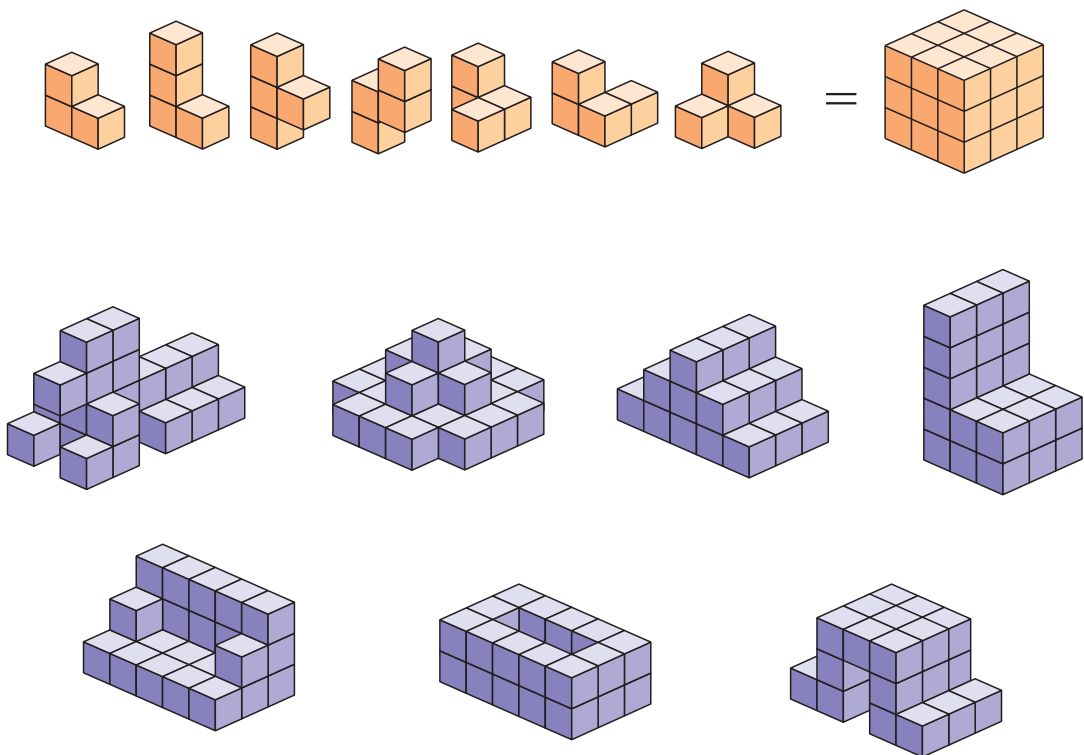
Rješenje vidimo na slici. Neki su matematičari poslije pokazali kako se površina može povećati ako se dopusti da susjedne pločice u ogradi imaju samo jednu zajedničku točku.

Soma kocka

Danski književnik i znanstvenik Piet Hein (1905. – 1996.), poznat pod pseudonimom Kumbel, 1936. godine stvorio je jednu od najpopularnijih matematičkih slagalica. Nazvao ju je **soma kocka**. Riječ *soma* na sanskritu je naziv ekstrakta biljke koji se u staroj Indiji rabila kao narkotik.

Slagalica se sastoji od sedam različitih dijelova i trodimenzionalna je analogija poliminu. Ti se dijelovi mogu složiti u kocku $3 \times 3 \times 3$ na **240** različitih načina. Hein je bio oduševljen činjenicom da se od sedam jednostavnih dijelova može rekonstruirati kocka. No od njih je moguće složiti i čitav niz raznovrsnih figura. Legendarnog Martina Gardnera upravo se ta činjenica osobito dojmila i ovoj je slagalici posvetio nekoliko svojih kolumni u uglednom časopisu *Scientific American* (rujan 1958., lipanj 1969., rujan 1972., kolovoz 1998.). Gardner se i sam potrudio složiti figure psa, piramide, stubišta, stolice, sofe, kade, tunela i još mnoge druge.³

Iznenadio ga je odaziv čitatelja. Tisuće njih poslali su mu svoje soma-modele.



³ Martin Gardner, *Origami, Eleusis and the Soma Cube*, The Mathematical Association of America, 2008.