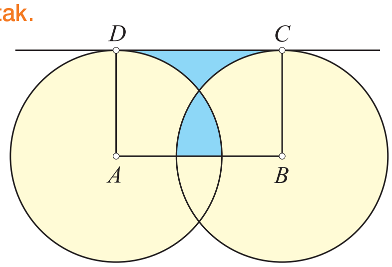
Pet zadataka

Branimir Dakić, Zagreb

Isprepletenost algebre i geometrije u elementarnoj se matematici najčešće ilustrira primjerima iz analitičke geometrije u kojoj metoda koordinata posreduje pri prijevodu geometrijskih sadržaja na algebarske forme (jednadžbe, nejednadžbe). Time se onda problemi geometrije prebacuju na teren algebre gdje se onda i rješavaju prikladnim algebarskim metodama. No u školskoj matematici ponekad se u rješavanje ne baš jednostavnih geometrijskih zadataka na vrlo učinkovit način može uplesti jednostavno računanje. Kako? Prikazat ćemo to na nekoliko primjera. Vjerujemo da bi oni mogli biti poticajni za razvitak kreativnosti naših učenika. Jer riječ je o povezivanju raznih sadržaja, jednostavnijem i racionalnijem rješavanju problema, o kreativnoj primjeni ranije stečenih znanja – najvrednijem obliku ponavljanja gradiva.

Zadatak.

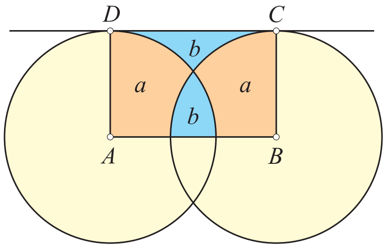


Dane su dvije sukladne kružnice sa središtima A i B i polumjerom $r = 1$. Kružnice se sijeku kao na slici. Pravac CD njihova je zajednička vanjska tangenta na koju su iz točaka A i B položene okomice te je tako određen pravokutnik $ABCD$. Ako su površine dvaju plavih dijelova ravnine jednake, kolika je površina pravokutnika?

Sa sljedeće slike zaključujemo:

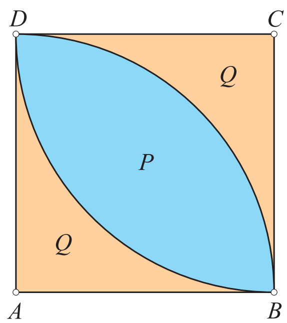
$$2a + 2b = 2(a+b) = \frac{1}{2}\pi.$$

Dakle je površina pravokutnika $ABCD$ jednaka polovini površine jednog od dvaju krugova.



Zadatak.

Dan je kvadrat $ABCD$ duljine stranice jednake a. Oko vrhova A i C opisani su lukovi kružnica s polumjerom koji je jednak stranici kvadrata te je tako omeđen plavi dio ravnine. Kolika je njegova površina?



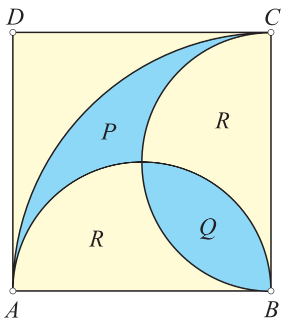
Oslanjajući se na sliku, možemo zapisati dvije jednadžbe: $P + 2Q = a^2$ te $P + Q = \frac{1}{4}a^2\pi$. Eliminiranjem iz toga sustava veličine Q, dobit ćemo

$$P = \frac{a^2}{2}(\pi - 2) \approx 0.57\,a^2.$$

To bi značilo da plavi dio kvadrata zauzima oko 57% njegove površine.

Zadatak.

Dan je kvadrat $ABCD$. Oko njegova vrha B opisana je kružnica, a nad stranicama AB i BC također su opisane kružnice. Lukovima ovih triju kružnica omeđen je plavi lik koji se sastoji od dva dijela. Dokažimo da ta dva dijela imaju jednaku površinu, odnosno da je $P = Q$.



Iz sustava jednadžbi

$$P + 2R + Q = \frac{1}{4}a^2\pi \quad \text{i} \quad 2R + 2Q = \frac{1}{4}a^2\pi$$

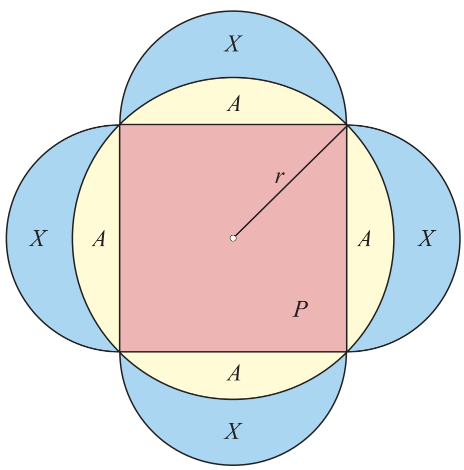
slijedi

$$P + 2R + Q = 2R + 2Q,$$

odnosno $P = Q$.

Zadatak.

Kvadratu je opisana kružnica, a nad stranicama kvadrata prema van konstruirane su polukružnice. Tako su dobivene četiri lunule (plava boja). Dokažite da je površina jedne lunule jednaka četvrtini površine kvadrata.



Neka je sa X označena površina lunule, s A površina kružnog odsječka, a s P površina kvadrata. Tada imamo:

$$4(A + X) = 2r^2\pi,$$
$$4A + P = 2r^2\pi,$$

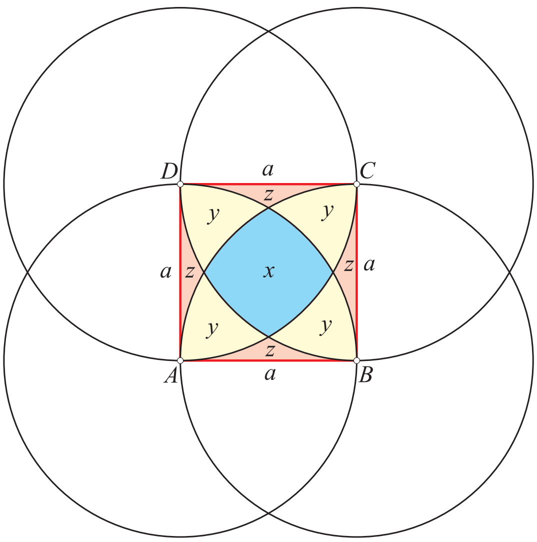
dakle

$$4A + 4X = 4A + P,$$

odnosno $P = 4X$ te je $X = \frac{1}{4}P$.

Zadatak.

Dan je kvadrat sa stranicom duljine a. Oko njegovih vrhova opisane su četiri kružnice polumjera a kojima je omeđen plavi dio ravnine. Kolika je površina toga lika?



Uvedemo oznake kao na slici pa možemo zapisati sustav jednadžbi:

$$x + 4y + 4z = a^2,$$
$$x + 3y + 2z = \frac{1}{4}a^2\pi,$$
$$x + 2y + z = \frac{1}{3}a^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Pomnožimo drugu jednadžbu sa (-4), treću sa 4 pa sve tri zbrojimo. Tako dobijemo

$$x = \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)a^2 \approx 0.315a^2.$$